

*ДЕУНДЯК Владимир Михайлович*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и дискретной математики института математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича Южного федерального университета (г. Ростов-на-Дону). Автор 220 научных публикаций

*ЛЕОНОВ Дмитрий Александрович*, магистрант второго года обучения по специальности «Математика» института математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича Южного федерального университета (г. Ростов-на-Дону)

## **ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СВЕРТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ДИЭДРАЛЬНЫХ ГРУППАХ**

Метод Фурье на коммутативных группах давно применяется во многих областях математики, физики и технических наук. В настоящее время растет применение этого метода и для некоммутативных групп: в частности, в области анализа ранжированной информации, при разработке методов помехоустойчивого кодирования, в теории и практике сетей передачи данных, при анализе изображений, в задаче дифракции на телах с некоммутативной группой симметрий. Особый интерес представляет разработка быстрого преобразования Фурье, позволяющего значительно ускорить решение практически важных задач. Но по сравнению с коммутативным случаем построение быстрого преобразования Фурье для некоммутативных групп существенно затрудняется из-за сложного строения дуальных объектов групп, в терминах которых это преобразование конструируется. Разработка эффективных алгоритмов быстрого преобразования Фурье и алгоритмов, оптимизированных под различные компьютерные архитектуры, для некоммутативных групп интенсивно ведется и в настоящее время. В данной статье исследуется метод Фурье решения сверточных уравнений на диэдральных группах  $D_m$ . Построено быстрое преобразование Фурье на диэдральных группах на основе редукции к быстрому преобразованию Фурье на циклических группах, получены явные численные формулы для прямого и обратного преобразований. На основе доказанных формул разработан эффективный алгоритм решения сверточных уравнений на диэдральных группах со сложностью  $O(m \log m)$ , где  $m$  – порядок максимальной циклической подгруппы диэдральной группы. Полученные теоретические результаты позволили на основе использования языка программирования C# разработать программную реализацию численного метода решения сверточных уравнений на произвольной группе  $D_m$ . В заключение приведены результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** диэдральная группа, сверточные уравнения, метод Фурье, быстрое преобразование Фурье.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) построено в 1965 году в [1], после чего появилось много различных алгоритмов и модификаций БПФ для циклической группы  $Z_n$  и других коммутативных групп. Для некоммутативных групп  $G$  построение БПФ существенно труднее из-за более сложного строения дуальных объектов  $\hat{G}$  по сравнению с коммутативным случаем. В 1978 году приведен один из первых примеров БПФ для некоторых некоммутативных групп [2]. Затем были созданы такие алгоритмы для разрешимых групп [3], некоторых конечных групп [4], [5], а также суперразрешимых некоммутативных групп [6]. Разработка более эффективных алгоритмов БПФ для различных классов некоммутативных групп активно ведется и сейчас.

Метод Фурье на некоммутативных группах имеет широкое применение [7]. В частности, в области анализа ранжированной информации [8], при разработке методов кодирования [9] и сетей передачи данных [10]. Диздральные группы используются для создания фильтров и анализа изображений [11]; Р.П. Тарасов и И.А. Загороднов применяли метод Фурье в задаче дифракции на телах с некоммутативной группой симметрий и, в частности, с диздральной группой [12].

Целью настоящей работы является разработка и программная реализация алгоритма быстрого преобразования Фурье на диздральной группе  $D_m$ , решение на этой основе сверточных уравнений и проведение численных экспериментов.

В разделе 2 приводятся необходимые сведения о сверточных уравнениях и преобразовании Фурье на конечных некоммутативных группах. В разделе 3 представлены разработанный и программно реализованный алгоритм быстрого преобразования Фурье на диздральной группе и созданный на этой основе представлен метод решения уравнений в свертках на группе  $D_m$ . В разделе 4 приводятся результаты численных экспериментов и рассматривается вопрос о сложности.

**Сверточные уравнения и преобразование Фурье на конечных некоммутативных**

**группах.** На произвольной конечной группе  $G$  введем атомарную меру и рассмотрим пространство комплексных функций  $L_p(G)$  при  $1 \leq p < \infty$  с нормой

$$\|\varphi\|_p = \left( \sum_{k \in G} |\varphi(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны [13, с. 202], поэтому все пространства  $L_p(G)$  при  $1 \leq p < \infty$  изоморфны. Левая свертка и правая свертка функций  $\varphi$  и  $\psi$  из  $L_1(G)$  обозначаются  $\varphi *_l \psi$  и  $\varphi *_r \psi$  соответственно и определяются формулами:

$$\begin{aligned} (\varphi *_l \psi)(y) &= \sum_{x \in G} \varphi(y x^{-1}) \psi(x), (\varphi *_r \psi)(y) = \\ &= \sum_{x \in G} \varphi(x^{-1} y) \psi(x), y \in G. \end{aligned}$$

Оператор левой свертки  $C_a^{(l)}: L_1(G) \rightarrow L_1(G)$  определяется равенством

$$(C_a^{(l)} f)(y) = (a *_l f)(y), y \in G.$$

Аналогично определяется оператор правой свертки  $C_a^{(r)}$ :

$$(C_a^{(r)} f)(y) = (a *_r f)(y), y \in G.$$

В случае коммутативной группы операторы левой и правой свертки совпадают.

На циклической группе  $Z_n$  преобразование Фурье  $F: L_2(Z_n) \rightarrow L_2(Z_n)$  определяется равенством

$$(F(f))(k) = \sum_{l=0}^{n-1} f(l) e^{i \frac{2\pi kl}{n}}, k, l \in Z_n$$

[14, с. 188], а обратное преобразование Фурье  $F^{-1}$  действует по формуле

$$(F^{-1}(f))(l) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi kl}{n}}, k, l \in Z_n.$$

Для задания преобразования Фурье на произвольной конечной группе  $G$  понадобятся

ся дополнительные конструкции из теории представлений [14]. Далее будем рассматривать линейные представления группы  $G$  в линейном пространстве  $C^n$ , т. е. гомоморфизмов  $G$  в группу невырожденных матриц  $GL(n, C)$ . Представление в группу унитарных матриц  $U(n)$  называется унитарным. Если в пространстве  $C^n$  представления  $T$  есть подпространство, инвариантное относительно всех  $T(g)$ ,  $g \in G$ , то говорят, что представление  $T$  приводимо. В противном случае представление называется неприводимым. Характером группы  $G$  называется произвольный гомоморфизм этой группы в мультипликативную группу  $S^1 = \{z \in C: |z|=1\}$ . Характер  $\chi_T$  конечномерного представления  $T$  группы  $G$  определяется с помощью следа:

$$\chi_T(g) = \text{tr}(T(g)).$$

Представления  $T, T'$  называются эквивалентными, если существует такая обратимая матрица  $Q$ , что  $T(g) = Q^{-1}T'(g)Q$  для любого  $g \in G$ . Множество классов эквивалентности унитарных неприводимых представлений группы  $G$  обозначают  $\hat{G}$  и называют дуальным объектом группы  $G$ . Если группа  $G$  коммутативна, то дуальный объект является группой и все неприводимые унитарные представления одномерны. В некоммутативном случае дуальный объект для группы  $G$  не является группой, и построить его труднее [15, с. 10–11]. Если группа  $G$  конечна, то и дуальный объект  $\hat{G}$  конечен, и мы зададим на нем атомарную меру.

Далее в вычислениях вместо класса эквивалентности  $\sigma \in \hat{G}$  будем при необходимости, как обычно, использовать фиксированное представление из этого класса. Множество таких фиксированных представлений обозначим  $\tilde{G}$ , и для функций  $\psi \in L_2(\hat{G})$  вместо  $\psi(\sigma)$  будем писать  $\psi(\rho)$ , где  $\rho = \sigma \cap \tilde{G}$ . Прямое преобразование Фурье  $F: L_2(G) \rightarrow L_2(\hat{G})$  определяется следующим образом [5, с. 32]:

$$\hat{f}(\rho) = (F(f))(\rho) = \sum_{x \in G} f(x)\rho(x), \rho \in \sigma \in \hat{G}, \quad (2.1)$$

а обратное  $F^{-1}: L_2(\hat{G}) \rightarrow L_2(G)$  задается равенством

$$\check{\psi}(x) = (F^{-1}(g))(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in \hat{G}} d_\rho \text{tr}(\psi(\rho)\rho(x^{-1})), \quad x \in G, \quad (2.2)$$

где  $d_\rho$  – размерность неприводимого представления  $\rho$ . (Здесь и далее для произвольного конечного множества  $X$  через  $|X|$  будем обозначать его мощность.)

Теперь рассмотрим уравнение

$$a * \phi = b_0, \quad a, b \in L_2(G), \quad (2.3)$$

относительно неизвестной  $\phi \in L_2(G)$ . Имеет место следующий аналог известного утверждения о существовании решения сверточного уравнения для случая коммутативных групп.

**Лемма.** Сверточное уравнение (2.3) имеет решение для любой правой части  $b_0$  тогда и только тогда, когда для всех  $\rho \in \tilde{G}$  выполняется

$$(F(a))(\rho) \neq 0.$$

**Доказательство.** Подействуем на обе части уравнения (2.3) преобразованием Фурье и воспользуемся свойством преобразования Фурье относительно свертки [5, с. 40]:

$$(F(a))(\rho) \cdot (F(\phi))(\rho) = (F(b_0))(\rho), \rho \in \tilde{G}.$$

Если  $(F(a))(\rho) = 0$  для какого-то  $\rho \in \tilde{G}$ , то правая часть  $(F(b_0))(\rho)$  тоже должна быть равна нулю и уравнение неразрешимо для произвольной правой части  $b_0$ .

Обратно, если значение  $(F(a))(\rho)$  для всех  $\rho \in \tilde{G}$  отлично от нуля, тогда

$$F(\phi) = (F(a))^{-1} F(b_0)$$

и можно подействовать обратным преобразованием Фурье и получить решение уравнения (3):

$$\phi = F^{-1}\left((F(a))^{-1} F(b_0)\right).$$

Нахождение неизвестной функции  $\phi$  уравнения (2.3) с помощью преобразования Фурье состоит из 3 шагов:

1) подействуем на уравнение (2.3) преобразованием Фурье:

$$F(a) \cdot F(\varphi) = F(b_0);$$

2) умножим полученное уравнение слева на обратный элемент к  $(F(a))(x)$ :

$$F(\varphi) = (F(a))^{-1} F(b_0);$$

3) воспользуемся обратным преобразованием Фурье и найдем  $\varphi$ :

$$\varphi = F^{-1} \left( (F(a))^{-1} F(b_0) \right).$$

Эта схема решения сверточного уравнения хорошо известна и широко применяется для абелевых групп. Для некоммутативных групп она становится сложнее из-за того, что для каждой группы нужно находить неприводимые представления и строить свой дуальный объект [15, с. 64].

**БПФ на диэдральной группе  $D_m$ .** Пусть  $\Delta_m$  – правильный  $m$ -угольник с центром в начале координат. Диэдральной группой  $D_m$  называют группу линейных преобразований плоскости, состоящую из тождественного преобразования, поворотов плоскости на углы  $2\pi/m, 2 \cdot 2\pi/m, \dots, (m-1) \cdot 2\pi/m$  и симметрий относительно осей симметрий  $\Delta_m$ .

Легко видеть, что группа  $D_m$  является группой с двумя образующими  $a$  и  $b$ , где  $a$  имеет порядок  $m$ ,  $b$  имеет порядок 2 и выполняется соотношение  $bad = a^{m-1}$ , т. е.  $D_m = \{e, a, \dots, a^{m-1}, b, ab, \dots, a^{m-1}b\}$ , и  $|D_m| = 2m$  [15, с. 68].

Для группы  $D_m$  следует различать случаи четного и нечетного  $m$ . Для четного  $m$  группа  $D_m$  имеет ровно 4 характера:  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ , которые определяются следующими условиями:  $\chi_1(a^k) = 1$  и  $\chi_1(a^k b) = 1$ ,  $\chi_2(a^k) = 1$  и  $\chi_2(a^k b) = -1$ ,

$$\chi_3(a^k) = (-1)^k \text{ и } \chi_3(a^k b) = (-1)^k, \chi_4(a^k) = (-1)^k$$

и  $\chi_4(a^k b) = (-1)^{k+1}$ , где  $k \in Z_m$ . В случае нечетного  $m$  группа  $D_m$  имеет 2 характера:  $\chi_1$  и  $\chi_2$ , которые определяются по таким же формулам,

которые приведены выше. Так как группа  $D_m$  некоммутативная, то она должна иметь неприводимые унитарные представления размерности больше 1. Пусть  $\alpha$  – примитивный корень  $m$ -й степени из единицы, например  $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ . Тогда представления  $U_{\alpha^h}$ , где  $h = 1, 2, \dots, (m-1)/2$  при нечетном  $m$  и  $h = 1, 2, \dots, (m-2)/2$  при четном  $m$ , определяемые формулами:

$$U_{\alpha^h}(a^j) = \begin{pmatrix} \alpha^{hj} & 0 \\ 0 & \alpha^{h(m-1)j} \end{pmatrix}, U_{\alpha^h}(ba^j) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{h(m-1)j} \\ \alpha^{hj} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

являются неприводимыми, попарно неэквивалентными и унитарными [15, с. 69].

Пусть  $\sigma_k$  – класс эквивалентности унитарных представлений группы  $D_m$ , содержащий представление  $U_{\alpha^k}$ . Если  $m$  – нечетно, то двойственный объект для  $D_m$  состоит из 2 характеров  $\chi_1, \chi_2$  и  $\frac{m-1}{2}$  элемента  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\frac{m-1}{2}}$ , т. е.

$$\hat{D}_m = \left\{ \chi_1, \chi_2, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\frac{m-1}{2}} \right\},$$

если  $m$  – четно, то двойственный объект для  $D_m$  состоит из 4 характеров  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$  и  $\frac{m-2}{2}$  элемента  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\frac{m-2}{2}}$ , т. е.

$$\hat{D}_m = \left\{ \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\frac{m-2}{2}} \right\}$$

[15, с. 74].

Для построения быстрого преобразования Фурье занумеруем элементы группы  $D_m$  следующим образом:

$$g_k = a^k,$$

где  $0 \leq k < m$  и

$$g_k = a^{k \bmod m} b,$$

где  $m \leq k < 2m$ .

**Теорема 1.** Пусть  $D_m$  – диэдральная группа и  $\hat{D}_m$  – двойственный объект для  $D_m$ ,  $\hat{D}_m$  – множество представлений группы, каждое из которых соответствует классам эквивалентности  $\sigma \in D_m$ , тогда преобразование Фурье функ-

ции  $f \in L_2(G)$  вычисляется по формуле

$$f(\chi_l) = \sum_{k=0}^{m-1} f(g_k) \chi_l(g_k), \quad (3.2)$$

для одномерных представлений  $\chi_l \in \tilde{D}_m$ , где  $l = 1, 2$  в случае нечетного  $m$  и  $l = 1, 2, 3, 4$  в случае четного  $m$ , и по формуле

$$\hat{f}(U_{\alpha^h}) = \sum_{k=0}^{m-1} \begin{pmatrix} f(g_k) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} & f(g_{k+m}) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} \\ f(g_{k+m}) e^{-\frac{2\pi i k h}{m}} & f(g_k) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

для двумерных неприводимых унитарных представлений  $U_{\alpha^h} \in \tilde{D}_m$ , где  $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{m}}$  и  $h = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}$  при нечетном  $m$  и  $h = 1, 2, \dots, \frac{m-2}{2}$  при четном  $m$ . Слож-

ность преобразования Фурье на диэдральной группе  $D_m$  равна  $O(m \log m)$ .

**Доказательство.** Формула (3.2) вытекает из формулы прямого преобразования Фурье (2.1) и нумерации элементов группы, приведенной перед теоремой. Количество операций умножения, требуемое для вычисления преобразования Фурье функции  $f$ , для одномерных представлений составляет  $O(m)$ .

Рассматривая формулу (2.1) прямого преобразования Фурье функции  $f$  для двумерных представлений  $U_{\alpha^h} \in \tilde{D}_m$  группы  $D_m$ , при  $h = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}$  при нечетном  $m$  и  $h = 1, 2, \dots, \frac{m-2}{2}$  при четном  $m$  получаем:

$$\begin{aligned} \hat{f}(U_{\alpha^h}) &= (F(f))(U_{\alpha^h}) = \sum_{x \in D_m} f(x) U_{\alpha^h}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f(g_k) \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i k h}{m}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i k h}{m}} \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_{k=m}^{2m-1} f(g_k) \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi i k h}{m}} \\ e^{-\frac{2\pi i k h}{m}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m-1} f(g_k) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} & \sum_{k=m}^{2m-1} f(g_k) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} \\ \sum_{k=m}^{2m-1} f(g_k) e^{-\frac{2\pi i k h}{m}} & \sum_{k=0}^{m-1} f(g_k) e^{-\frac{2\pi i k h}{m}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Сделаем замену

$$\sum_{k=m}^{2m-1} f(g_k) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} = \sum_{k=0}^{m-1} f(g_{k+m}) e^{\frac{2\pi i (k+m) h}{m}} = \sum_{k=0}^{m-1} f(g_{k+m}) e^{\frac{2\pi i k h}{m}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{f}(U_{\alpha^h}) &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m-1} f(g_k) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} & \sum_{k=0}^{m-1} f(g_{k+m}) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} \\ \sum_{k=0}^{m-1} f(g_{k+m}) e^{-\frac{2\pi i k h}{m}} & \sum_{k=0}^{m-1} f(g_k) e^{-\frac{2\pi i k h}{m}} \end{pmatrix}, \\ \hat{f}(U_{\alpha^h}) &= \sum_{k=0}^{m-1} \begin{pmatrix} f(g_k) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} & f(g_{k+m}) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} \\ f(g_{k+m}) e^{-\frac{2\pi i k h}{m}} & f(g_k) e^{-\frac{2\pi i k h}{m}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Когда  $h$  меняется от 0 до  $m-1$ , то в каждой ячейке матрицы записано преобразование Фурье для циклической группы  $Z_m$ . Таким образом, для того, чтобы получить быстрое преоб-

разование Фурье для диэдральной группы  $D_m$ , нужно применить быстрое преобразование Фурье для  $Z_m$  для каждого элемента матрицы. Сложность одного быстрого преобразования Фурье для  $Z_m$  составляет  $O(m \log m)$  [1], получаем, что сложность преобразования Фурье для диэдральной группы  $D_m$  составит  $O(m \log m)$ , где  $m$  – порядок максимальной циклической подгруппы группы  $D_m$ .

**Теорема 2.** Пусть  $D_m$  – диэдральная группа и  $\hat{D}_m$  – двойственный объект для  $D_m$ ,  $\tilde{D}_m$  – множество представлений  $D_m$ , каждое из которых соответствует классам эквивалентности

$\sigma \in \hat{D}_m$ ,  $\varphi \in L_2(\hat{G})$  и

$$\varphi(U_{\alpha^h}) = \begin{pmatrix} a_h(0) & a_h(1) \\ a_h(2) & a_h(3) \end{pmatrix}, U_{\alpha^h} \in \tilde{D}_m,$$

где  $h=1,2,\dots,\frac{m-1}{2}$  при нечетном  $m$  и  $h=1,2,\dots,\frac{m-2}{2}$  при четном  $m$ . Тогда: 1) обратное преобразование Фурье функции  $\varphi \in L_2(\hat{G})$ , когда  $m$  произвольное нечетное, вычисляется по формулам:

$$\tilde{\varphi}(g_k) = \frac{1}{2m} \left( \varphi(\chi_1) + \varphi(\chi_2) + 2 \sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( a_h(0) e^{-\frac{2\pi i k h}{m}} + a_h(3) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} \right) \right), \chi_1, \chi_2 \in \tilde{D}_m \quad (3.4)$$

при  $0 < k < m$  и

$$\tilde{\varphi}(g_k) = \frac{1}{2m} \left( \varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2) + 2 \sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( a_h(1) e^{-\frac{2\pi i k h}{m}} + a_h(2) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} \right) \right), \chi_1, \chi_2 \in \tilde{D}_m \quad (3.5)$$

при  $m \leq k < 2m$ ;

2) для произвольного четного  $m$ :

$$\tilde{\varphi}(g_k) = \frac{1}{2m} \left( \varphi(\chi_1) + \varphi(\chi_2) + (-1)^k \varphi(\chi_3) + (-1)^k \varphi(\chi_4) + 2 \sum_{h=1}^{\frac{m-2}{2}} \left( a_h(0) e^{-\frac{2\pi i k h}{m}} + a_h(3) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} \right) \right), \quad (3.6)$$

где  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \in \tilde{D}_m$ , при  $0 < k < m$  и

$$\tilde{\varphi}(g_k) = \frac{1}{2m} \left( \varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2) + (-1)^k \varphi(\chi_3) + (-1)^{k+1} \varphi(\chi_4) + 2 \sum_{h=1}^{\frac{m-2}{2}} \left( a_h(1) e^{-\frac{2\pi i k h}{m}} + a_h(2) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} \right) \right), \quad (3.7)$$

где  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \in \tilde{D}_m$ , при  $m \leq k < 2m$ . Сложность обратного преобразования Фурье на диэдральной группе  $D_m$  равна  $O(m \log m)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим формулу обратного преобразования Фурье (2.2) функ-

ции  $\varphi \in L_2(\hat{G})$  для случая нечетного  $m$  и преобразуем ее:

$$\tilde{\varphi}(g_k) = (F^{-1}(\varphi))(g_k) = \frac{1}{|D_m|} \sum_{\rho \in \tilde{D}_m} d_\rho \text{tr}(\varphi(\rho) \rho(g_k^{-1})) =$$

$$= \frac{1}{2m} \left( d_{\chi_1} \text{tr}(\varphi(\chi_1) \chi_1(g_k^{-1})) + d_{\chi_2} \text{tr}(\varphi(\chi_2) \chi_2(g_k^{-1})) + \sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} d_{U_{\alpha^h}} \text{tr}(\varphi(U_{\alpha^h}) U_{\alpha^h}(g_k^{-1})) \right) =$$

$$= \frac{1}{2m} \left( \varphi(\chi_1) + \varphi(\chi_2) + 2 \text{tr} \left( \begin{pmatrix} a_1(0) & a_1(1) \\ a_1(2) & a_1(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i k}{m}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i k}{m}} \end{pmatrix} \right) + 2 \text{tr} \left( \begin{pmatrix} a_2(0) & a_2(1) \\ a_2(2) & a_2(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i k \cdot 2}{m}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i k \cdot 2}{m}} \end{pmatrix} \right) + \dots \right)$$

$$\begin{aligned} & \dots + 2tr \left( \begin{pmatrix} a_{\frac{m-1}{2}}(0) & a_{\frac{m-1}{2}}(1) \\ a_{\frac{m-1}{2}}(2) & a_{\frac{m-1}{2}}(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi ik \frac{m-1}{2}}{m}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi ik \frac{m-1}{2}}{m}} \end{pmatrix} \right) = \\ & = \frac{1}{2m} \left( \varphi(\chi_1) + \varphi(\chi_2) + 2 \sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( a_h(0) e^{-\frac{2\pi ikh}{m}} + a_h(3) e^{\frac{2\pi ikh}{m}} \right) \right), \chi_1, \chi_2 \in \tilde{D}_m, \end{aligned}$$

где  $0 < k < m$ . При  $m \leq k < 2m$  получаем

$$\begin{aligned} \check{\varphi}(g_k) &= (F^{-1}(\varphi))(g_k) = \frac{1}{|D_m|} \sum_{\rho \in \tilde{D}_m} d_\rho tr(\varphi(\rho) \rho(g_k^{-1})) = \\ &= \frac{1}{2m} \left( d_{\chi_1} tr(\varphi(\chi_1) \chi_1(g_k^{-1})) + d_{\chi_2} tr(\varphi(\chi_2) \chi_2(g_k^{-1})) + \sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} d_{U_{\alpha^h}} tr(\varphi(U_{\alpha^h}) U_{\alpha^h}(g_k^{-1})) \right) = \\ &= \frac{1}{2m} \left( \varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2) + 2tr \left( \begin{pmatrix} a_1(0) & a_1(1) \\ a_1(2) & a_1(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi ik}{m}} \\ e^{-\frac{2\pi ik}{m}} & 0 \end{pmatrix} \right) + 2tr \left( \begin{pmatrix} a_2(0) & a_2(1) \\ a_2(2) & a_2(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi ik \cdot 2}{m}} \\ e^{-\frac{2\pi ik \cdot 2}{m}} & 0 \end{pmatrix} \right) + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + 2tr \left( \begin{pmatrix} a_{\frac{m-1}{2}}(0) & a_{\frac{m-1}{2}}(1) \\ a_{\frac{m-1}{2}}(2) & a_{\frac{m-1}{2}}(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi ik \frac{m-1}{2}}{m}} \\ e^{-\frac{2\pi ik \frac{m-1}{2}}{m}} & 0 \end{pmatrix} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2m} \left( \varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2) + 2 \sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( a_h(1) e^{-\frac{2\pi ikh}{m}} + a_h(2) e^{\frac{2\pi ikh}{m}} \right) \right), \chi_1, \chi_2 \in \tilde{D}_m. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем формулу обратного преобразования Фурье на диэдральной группе для произвольного нечетного  $m$ :

$$\check{\varphi}(g_k) = \frac{1}{2m} \left( \varphi(\chi_1) + \varphi(\chi_2) + 2 \sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( a_h(0) e^{-\frac{2\pi ikh}{m}} + a_h(3) e^{\frac{2\pi ikh}{m}} \right) \right), \chi_1, \chi_2 \in \tilde{D}_m$$

при  $0 < k < m$  и

$$\check{\varphi}(g_k) = \frac{1}{2m} \left( \varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2) + 2 \sum_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( a_h(1) e^{-\frac{2\pi ikh}{m}} + a_h(2) e^{\frac{2\pi ikh}{m}} \right) \right), \chi_1, \chi_2 \in \tilde{D}_m$$

при  $m \leq k < 2m$ .

Для четного  $m$  формула немного изменится, т. к. вместо 2 появляются 4 характера. Форму-

ла для четного  $m$  выводится аналогичным образом:

$$\tilde{\varphi}(g_k) = \frac{1}{2m} \left( \varphi(\chi_1) + \varphi(\chi_2) + (-1)^k \varphi(\chi_3) + (-1)^k \varphi(\chi_4) + 2 \sum_{h=1}^{\frac{m-2}{2}} \left( a_h(0) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} + a_h(3) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} \right) \right),$$

при  $0 < k < m$  и

$$\tilde{\varphi}(g_k) = \frac{1}{2m} \left( \varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2) + (-1)^k \varphi(\chi_3) + (-1)^{k+1} \varphi(\chi_4) + 2 \sum_{h=1}^{\frac{m-2}{2}} \left( a_h(1) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} + a_h(2) e^{\frac{2\pi i k h}{m}} \right) \right),$$

при  $m \leq k < 2m$ . Когда  $k$  меняется от 0 до  $m-1$  и от  $m$  до  $2m-1$ , то в формулах (1)–(4) записаны прямое и обратное преобразования Фурье для циклической группы  $Z_m$ . Таким образом, для того чтобы получить быстрое обратное преобразование Фурье для диэдральной группы  $D_m$ , нужно применить быстрое преобразование Фурье для циклической группы  $Z_m$  4 раза. Сложность обратного преобразования Фурье для диэдральной группы  $D_m$  составит  $O(m \log m)$ , где  $m$  – порядок максимальной циклической подгруппы группы  $D_m$ .

**Численные эксперименты.** Алгоритм решения сверточного уравнения на конечной группе, приведенный в конце раздела 2, состоит в применении прямого и обратного преобразований Фурье (ПФ), а также поточечного умно-

жения на вектор. В разделе 3 для диэдральной группы  $D_m$  разработан алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), сложность которого  $O(m \log m)$ . В силу теорем 1, 2, сложность решения сверточного уравнения на  $D_m$  при использовании построенного алгоритма составляет  $O(m \log m)$ . В работе построено программное средство для решения сверточного уравнения на  $D_m$ , проведены эксперименты и проанализирована зависимость времени работы программы от мощности группы (МГ).

Результаты экспериментов представлены в табл. 1 и 2, при этом табл. 1 содержит диапазон мощностей групп от 100 до 800, а табл. 2 – от 1000 до 2000. В первой строке таблицы указано время работы программы решения сверточного уравнения на группе  $D_m$  с использованием

Таблица 1

ДИАПАЗОН МОЩНОСТЕЙ ГРУПП ОТ 100 ДО 800

№ 1	$ G $	100	200	300	400	500	600	700	800
1	$t$ (БПФ, $D_m$ )	0.009	0.013	0.022	0.0223	0.0235	0.042	0.0425	0.043
2	$t$ (БПФ, $Z_{2m}$ )	0.005	0.0079	0.015	0.0153	0.0155	0.0318	0.033	0.035
3	$t$ (ПФ, $Z_{2m}$ )	0.042	0.043	0.074	0.138	0.205	0.318	0.439	0.517
4	$t$ (МГ, $D_m$ )	0.023	0.153	0.37	0.885	1.754	4.086	4.75	9.891

Таблица 2

ДИАПАЗОН МОЩНОСТЕЙ ГРУПП ОТ 1000 ДО 2000

№ 2	$ G $	1000	1200	1400	1600	1800	2000
1	$t$ (БПФ, $D_m$ )	0.046	0.086	0.087	0.091	0.095	0.098
2	$t$ (БПФ, $Z_{2m}$ )	0.032	0.061	0.062	0.063	0.064	0.068
3	$t$ (ПФ, $Z_{2m}$ )	0.881	1.179	1.604	2.213	2.64	3.25
4	$t$ (МГ, $D_m$ )	14.095	24.347	38.688	78.98	129.115	193.516

БПФ. Для сравнения во второй строке указано время работы аналогичной программы на циклической группе  $Z_{2m}$  (описание метода для БПФ на циклических группах содержится в [1]). Численные результаты показывают, что время работы алгоритма для неабелевой группы  $D_m$  не существенно отличается от времени работы для равномошной ей абелевой группы  $Z_{2m}$ . Однако полученные численные результаты демонстрируют преимущество решения сверточного уравнения с применением БПФ, перед обычным преобразованием Фурье (ПФ) (см. (2.1), (2.2)) и методом Гаусса (МГ). Соответствующие результаты экспериментов приведены в 3 и 4 строках таблиц.

Численные эксперименты проводились на ОС Windows 7 Professional, Service Pack 1, 64bit, процессор Intel Core 2 Quad CPU Q6600 2.40GHz, ОЗУ 4.00 Gb. Программное средство реализовано с помощью языка программирования C#.

**Заключение.** На диэдральной группе  $D_m$  построено быстрое преобразование Фурье. Разработана программная реализация численного метода решения сверточных уравнений на произвольной диэдральной группе  $D_m$  ( $m \geq 3$ ) с применением построенного быстрого преобразования Фурье и приведены результаты численных экспериментов.

**Список литературы**

1. Cooley J.W., Tukey J.W. An Algorithm for Machine Calculation of Complex Fourier Series // Mathematics of Computation. 1965. Vol. 19, № 90. P. 297–301.
2. Willsky A. On the Algebraic Structure of Certain Partially Observable Finite-State Markov Processes // Information and Control. 1978. Vol. 38. P. 179–212.
3. Beth T. On the Computational Complexity of the General Discrete Fourier Transform // Theor. Comp. Sci. 1987. Vol. 51. P. 331–339.
4. Clausen M. Fast Generalized Fourier Transforms // Theor. Comp. Sci. 1989. Vol. 67, № 1. P. 55–63.
5. Diaconis P., Rockmore D. Efficient Computation of Fourier Inversion for Finite Groups // J. of the ACM. 1994. Vol. 41, № 1. P. 31–66.
6. Baum U. Existence and Efficient Construction of Fast Fourier Transforms for Supersolvable Groups // Computational Complexity. 1991. Vol. 1. P. 235–256.
7. Brigham E. The Fast Fourier Transform and its Applications. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1988.
8. Diaconis P. Group Representations in Probability and Statistics. IMS, Hayward, CA, 1988.
9. Lafferty J., Rockmore D. Codes and Iterative Decoding on Algebraic Expander Graphs // Proceedings of International Symposium on Information Theory and its Application, Honolulu, November 5–8 2000. Honolulu, Hawaii, USA, 2000.

10. Rockmore D. Recent Progress and Applications in Group FFTs // *Computational Noncommutative Algebra and Applications*. 2004. Vol. 136. P. 227–254.
11. Leinz R. Using Representations of the Dihedral Groups in the Design of Early Vision Filters. Kyoto, 1993.
12. Загороднов И.А., Тарасов Р.П. Задача дифракции на телах с некоммутативной конечной группой симметрий и численное ее решение // *Журн. вычисл. математики и матем. физики*. 1997. Т. 37, № 10. С. 1246–1262.
13. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ в задачах. М., 1969.
14. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М., 1978.
15. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. М., 1975.

### References

1. Cooley J.W., Tukey J.W. An Algorithm for Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, 1965, vol. 19, no. 90, pp. 297–301.
2. Willsky A. On the Algebraic Structure of Certain Partially Observable Finite-State Markov Processes. *Information and Control*, 1978, vol. 38, pp. 179–212.
3. Beth T. On the Computational Complexity of the General Discrete Fourier Transform. *Theor. Comp. Sci.*, 1987, vol. 51, pp. 331–339.
4. Clausen M. Fast Generalized Fourier Transforms. *Theor. Comp. Sci.*, 1989, vol. 67, no. 1, pp. 55–63.
5. Diaconis P., Rockmore D. Efficient Computation of Fourier Inversion for Finite Groups. *J. of the ACM*, 1994, vol. 41, no. 1, pp. 31–66.
6. Baum U. Existence and Efficient Construction of Fast Fourier Transforms for Supersolvable Groups. *Computational Complexity*, 1991, vol. 1, pp. 235–256.
7. Brigham E. *The Fast Fourier Transform and its Applications*. NJ, USA, 1988.
8. Diaconis P. *Group Representations in Probability and Statistics*. Hayward, USA, 1988.
9. Lafferty J., Rockmore D. Codes and Iterative Decoding on Algebraic Expander Graphs. *Proceedings of International Symposium on Information Theory and its Application, Honolulu, November 5–8, 2000*. Honolulu, Hawaii, USA, 2000.
10. Rockmore D. Recent Progress and Applications in Group FFTs. *Computational Noncommutative Algebra and Applications*, 2004, vol. 136, pp. 227–254.
11. Leinz R. *Using Representations of the Dihedral Groups in the Design of Early Vision Filters*. Kyoto, 1993.
12. Zagorodnov I.A., Tarasov R.P. Zadacha difraktsii na telakh s nekommutativnoy konechnoy gruppoy simmetriy i chislennoe ee reshenie [The Problem of Diffraction on Bodies with Non-Commutative Finite Group of Symmetries and Numerical Solution]. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 1997, vol. 37, no. 10, pp. 1246–1262.
13. Glazman I.M., Lyubich Yu.I. *Konechnomernyy lineynyy analiz v zadachakh* [Finite-Dimensional Linear Analysis in the Problems]. Moscow, 1969.
14. Kirillov A.A. *Elementy teorii predstavleniy* [Elements of Theory of Representations]. Moscow, 1978.
15. Hewitt E., Ross K. *Abstract Harmonic Analysis. Vol. 2*. Heidelberg, 1970.

**Deundyak Vladimir Mikhailovich,**

Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science  
named after I.I. Vorovich, Southern Federal University (Rostov-on-Don, Russia)

**Leonov Dmitriy Aleksandrovich,**

Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science  
named after I.I. Vorovich, Southern Federal University (Rostov-on-Don, Russia)

### FAST FOURIER TRANSFORM FOR SOLUTION OF CONVOLUTION EQUATIONS ON DIHEDRAL GROUPS

Fourier method has been used for a long time in many fields of mathematics, physics and engineering sciences on commutative groups. At present time this method is used for non-commutative groups: in the analysis of ranked data, in developing of methods for Error Control Coding, in DTN theory and

practice, in the imaging analysis, in the problem of diffraction on bodies with non-commutative symmetry group. The development of the fast Fourier transform that can significantly speed up the solution of important practical problems is of particular interest. But in comparison with the commutative variant the construction of the fast Fourier transforms for non-commutative groups is more difficult because of the complexity of the dual objects group in terms of which this transformation is constructed. Development of efficient fast Fourier transform algorithms and algorithms optimized for different computer architectures for non-commutative groups is intensively conducted currently. This paper studies Fourier method of solution of convolution equations on dihedral groups  $D_m$ . The fast Fourier transform on dihedral groups on the basis of reduction to the fast Fourier transform on the cyclic groups is built, the explicit numerical formulas for forward and inverse transformations are obtained. On the basis of proved formulas an effective algorithm has been developed for solution of convolution equations on dihedral groups with complexity  $O(m \log m)$ , where  $m$  is the order of maximal cyclic subgroup of the dihedral group. Obtained theoretical results allowed us on the basis of the programming language C# to develop a software implementation of the numerical method for solution of convolution equations on arbitrary group  $D_m$ . The results of numerical experiments are presented in the paper.

**Keywords:** *dihedral group, convolution equations, Fourier method, fast Fourier transform.*

*Контактная информация:*

Деундяк Владимир Михайлович

*адрес:* 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8;

*e-mail:* vlade@math.rsu.ru

Леонов Дмитрий Александрович

*адрес:* 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8;

*e-mail:* tori\_92@inbox.ru