УДК 517.518.8

***ПОЛОВИНКИНА Юлия Станиславовна***, *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и высокопроизводительных вычислений института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 37 научных публикаций, в т. ч. трех учебных пособий*

# *МОДИФИКАЦИИ ИТЕРАЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ ПО МНОГОЧЛЕНАМ БЕРНШТЕЙНА*

Для многочленов Бернштейна и ряда их классических обобщений, относящихся к классу линейных положительных операторов, известно, что с увеличением гладкости функции порядок ее приближения такими операторами не улучшается. А именно, наличие производной выше второго порядка перестает влиять на увеличение скорости сходимости многочленов Бернштейна к порождающей функции. При этом многочлены Бернштейна обладают замечательным свойством одновременного приближения функции и ее производных, что делает их удобным инструментом для применения в построении различных численных моделей (например, для аппроксимации исходных данных мониторинга в вычислительных алгоритмах). Существует несколько подходов к получению последовательностей полиномиальных операторов, которые решали бы проблему скорости аппроксимации непрерывно дифференцируемых функций. Чаще всего речь идет о построении некоторых модификаций исходных многочленов, например последовательностей бернштейновского типа, модификаций Кирова. В статье предлагается принципиально другой способ обобщения классических многочленов, позволяющий сохранить их линейность и положительность, а следовательно, и основанные на этом методы доказательства утверждений, но при этом приводящий к получению операторов, реагирующих на повышение гладкости функции. Для этого сначала строятся итерационные сплайны по многочленам Бернштейна, имеющие более высокую скорость сходимости к порождающей функции, чем исходные операторы. Для них приведены соответствующие теоремы об аппроксимации непрерывных и гладких функций, даны оценки центральных моментов. Показано, что, несмотря на увеличение общей скорости сходимости, построенные сплайны обладают тем же недостатком, что и порождающие их многочлены: приближение с их помощью функций, имеющих производную выше второго порядка, не улучшается. Затем изучаются такие модификации рассматриваемых сплайнов, порядок сходимости которых к порождающей функции существенно увеличивается с повышением ее гладкости. Исследуются основные приближающие свойства полученных последовательностей операторов, доказываются соответствующие теоремы типа Поповичиу и Вороновской–Бернштейна.

***Ключевые слова:*** *итерационный сплайн, многочлены Бернштейна, модификации.*

Одним из основных направлений теории аппроксимации непрерывных на отрезке функций является теория линейных операторов. Приближающие свойства последовательностей таких операторов, возможность нахождения оценки отклонения в случае замены исходной функции соответствующим оператором во многом зависят от их положительности. Частным случаем линейных положительных операторов являются многочлены Бернштейна, которые для класса функций $f \in C\,[0;1]$ имеют вид

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(k/n\right) p_{nk}(x),$$

$$p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

И хотя для непрерывно дифференцируемой на отрезке функции операторы $B_n(f;\, x)$ осуществляют одновременное равномерное приближение функции и ее производных, они обладают существенным недостатком. Е.В. Вороновской в [1] было доказано, что скорость приближения дифференцируемых функций многочленами Бернштейна $B_n(f;\, x)$ не растет с увеличением порядка гладкости функции выше второго, а именно, он равен $O(n^{-1})$.

Многочлены Бернштейна являются частным случаем линейных положительных операторов канонического порядка, характеризующихся некоторой заданной скоростью убывания своих значений для функций вида $(t-x)^v$, $v = 0, 1, 2\ldots$, называемых центральными моментами. В работах различных математиков предлагались последовательности операторов, которые улучшали бы качество приближения гладких функций. В частности, В.С. Виденский [2] и Т.П. Пендина [3] предложили так называемые бернштейновские модификации операторов. Последовательности строились следующим образом:

$$B_{n1}(f;\, x) = B_{n2}(f;\, x) = B_n(f;\, x),$$

$$B_{n\nu}(f;x) = B_{n\nu}(f;x) - \sum_{k=2}^{\nu-1} \frac{1}{k!} \cdot S_k(B_n;x) \cdot B_{n,\nu-k}(f^{(k)};x), \quad \nu \ge 3.$$

Для таких модификаций, построенных для функции $f \in C^{(v)}[a;\, b]$, $v \ge 2$, ими доказана оценка вида

$$|B_{n,m+1}(f;x) - f(x)| \le \frac{K(m)x(1-x)}{n^{m/2}} \omega(f^{(m)}; \frac{b-a}{\sqrt{n}}), \quad (1)$$

где $K(m)$ – константа, зависящая только от $m$, $\omega(f;\, \delta)$ – модуль непрерывности функции $f$.

Т.В. Ершова [4] показала, что последовательности такого типа применимы к линейным положительным операторам канонического порядка, которые переводят тождественную единицу в себя. В работах автора, например в [5], построены обобщения многочленов Бернштейна и их модификации, которые реагируют на повышение гладкости приближаемой функции, тем самым улучшая качество ее приближения.

Болгарский математик G.H. Kirov [6] построил для дифференцируемых функций $f \in C^{(p)}[0;\, 1]$ модификации многочленов Бернштейна вида

$$H_{np}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{p} \frac{f^{(i)}(k/n)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^i p_{nk}.$$

Другой подход для решения проблемы сходимости для операторов $B_n(f;\, x)$ был указан М.Ш. Джамаловым [7], рассмотревшим итерационный процесс по исходным многочленам Бернштейна.

Еще одним способом улучшения аппроксимирующих свойств операторов является предложенная автором настоящей статьи последовательность сплайнов на основе многочленов Бернштейна, для которой в [8] изучен итерационный процесс, доказаны основные теоремы о приближающих свойствах. Кроме того, к этим сплайнам можно применить идеи построения различных модификаций, в частности модификации типа Кирова. Соответствующие результаты приведены в [9].

В предлагаемой работе описываются результаты, полученные в ходе построения бернштейновских модификаций по итерационным сплайнам. Доказывается, что скорость сходимости полученных модификации будет выше по сравнению как с исходными сплайнами, так и с берштейновскими модификациями для классических многочленов $B_n(f;\, x)$. Приведем теперь соответствующие утверждения.

*Сплайны по многочленам Бернштейна.* Рассмотрим сплайны, построенные по многочленам Бернштейна. Пусть функция $f \in C[a; b]$. Разделим отрезок $[a; b]$ равноотстоящими узлами $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на $n$ промежутков $I_m$, где $I_1 = [x_0; x_1]$, $I_m = (x_{m-1}; x_m]$, $m = \overline{2,n}$.

Теперь на каждом отрезке $[x_{m-1}; x_m]$, $m = \overline{1,n}$, зададим смещенный оператор Бернштейна степени $s$. Для этого выберем $s + 1$ равноотстоящий узел по правилу

$$\xi_{mk} = x_{m-1} + \frac{\delta_n}{s}k, \quad \delta_n = \frac{b-a}{n}, \quad k = \overline{0,s}.$$

Смещенный многочлен Бернштейна на отрезке $[x_{m-1}; x_m]$ имеет вид

$$B_s\left(f; x; I_m\right) = \left(\frac{b-a}{n}\right)^{-s} \sum_{k=0}^{s} f\left(\xi_{mk}\right) p_{sk}\left(I_m\right), \qquad (2)$$

$$p_{sk}\left(I_m\right) = C_s^k \left(x - x_{m-1}\right)^k \left(x_m - x\right)^{s-k}.$$

Введем оператор

$$B_{ns}\left(f; x\right) = \sum_{m=1}^{n} B_s(f; x; I_m)\chi(I_m),$$

где $\chi(I_m)$ – характеристическая функция промежутка $I_m$, принимающая значение единицы в точках этого промежутка и значение ноль во всех остальных точках отрезка $[a; b]$. Очевидно, что $B_{ns}(f; x_k) = f(x_k)$, поэтому построенный оператор $B_{ns}(f; x)$ является интерполяционным сплайном. Кроме того, он относится и к классу линейных положительных операторов, т. к. таковыми являются все многочлены вида (2).

Для смещенных многочленов Бернштейна (2) на каждом отрезке разбиения $[x_{m-1}; x_m]$ рассмотрим их центральные моменты

$$S_\nu(I_m) = B_s((t - x)^\nu; x; I_m).$$

Теперь определим центральные моменты сплайна $B_{ns}(f; x)$ по правилу

$$S_\nu(B_{ns}; x) = B_{ns}((t - x)^\nu; x).$$

Ясно, что

$$S_\nu(B_{ns}; x) = \sum_{m=1}^{n} S_\nu(I_m)\chi(I_m), \quad \nu = 0,1,2,\ldots$$

Для доказательства теорем об аппроксимации функций такими операторами важнейшей является оценка построенных центральных моментов. Ранее нами было доказано, что

$$S_2(B_{ns}) = O(1/n^2)O(1/s),$$

а также неравенство вида

$$|S_\nu(B_{ns}; x)| \le \frac{K(\nu)}{h^\nu s^{[(\nu+1)/2]}}, \quad h = \frac{n}{b-a}, \quad \nu \ge 2. \qquad (3)$$

То, что построенные операторы для непрерывных функций образуют аппроксимирующую последовательность, выражается следующей теоремой типа Поповичиу.

**Теорема 1.** Если $f \in C[a; b]$, то

$$\| B_{ns} f - f \| \le 2\omega(f; \frac{b-a}{n\sqrt{s}}).$$

Кроме того, для сплайнов $B_{ns}(f; x)$ верна теорема типа Вороновской о приближении непрерывно дифференцируемых функций с помощью таких сплайнов, которую можно записать в виде следующего предельного соотношения.

**Теорема 2.** Пусть $f \in C^{(2)}[a; b]$. Тогда выполняется предельное равенство вида

$$\lim_{n\to\infty} | B_{ns} f - f \,| n^2 s = f'' \cdot \frac{(b-a)^2}{8}).$$

Отсюда следует, что порядок приближения функций посредством сплайнов $B_{ns}(f; x)$ существенно лучше, чем у исходных классических многочленов Бернштейна. Однако повышение гладкости функции по-прежнему не сказывается на качестве ее приближения с помощью $B_{ns}(f; x)$.

В качестве одного из возможных путей решения данной проблемы можно рассмотреть итерацию по сплайнам $B_{ns}(f; x)$, построенную нами в [8]. Пусть $I$ – единичный оператор на пространстве функций $f \in C[a; b]$. Теперь рассмотрим $m$-кратное применение оператора $B_{ns} - I$. Искомый итерационный оператор имеет вид $B_{ns}^m = I - (I - B_{ns})^m$, который иначе может быть записан как $(I - B_{ns}^m) = (I - B_{ns})^m f$. Верна следующая основная аппроксимационная теорема.

**Теорема 3.** Если $f \in C^{(2m)}[a; b]$, $m \in N$, то

$$B_{ns}^{m} f - f = O(1/n^{2m})O(1/s^{m}) f^{(2m)} + o(1/n^{2m})o(1/s^{m}).$$

Следовательно, $m$-кратная итерация по сплайнам $B_{ns}(f; x)$ для функции $f \in C^{(2m)}[a; b]$ дает порядок приближения $n^{-2m}s^{-m}$.

В [9] автором были рассмотрены модификации Кирова для сплайнов $B_{ns}(f; x)$ вида

$$G_{ns}^{p}(f;x) = \sum_{m=1}^{n} G_{s}^{p}(f;x;I_m)\chi(I_m),$$

где

$$G_{s}^{p}(f;x;I_m) = \sum_{k=0}^{s}\sum_{i=0}^{p} p_{sk}(f;x;I_m)\frac{f^{(i)}(\xi_{mk})}{i!}(x-\xi_{mk})^{i}.$$

Для введенных операторов было доказано, что порядок приближения с их помощью функций класса $f \in C^{(p)}[a; b]$ равен $n^{-p-1}s^{-(p+1)/2}$.

Рассмотрим другой способ построения модификаций. В целях улучшения приближающих свойств сплайнов $B_{ns}(f; x)$ в отношении гладких функций построим их модификации бернштейновского типа.

Введем последовательность операторов для функции $f \in C^{(p-1)}[a; b]$ следующим образом:

$$B_{ns}^{1}(f;x) = B_{ns}^{2}(f;x) = B_{ns}(f;x),$$

$$B_{ns}^{p}(f;x) = B_{ns}(f;x) - \sum_{k=2}^{p-1}\frac{1}{k!}\cdot S_k(B_{ns};x)\cdot B_{ns}^{p-k}(f^{(k)};x), \quad p \ge 3. \tag{4}$$

Очевидно, что указанная последовательность образована линейными положительными операторами. Докажем основную теорему о порядке скорости сходимости для построенной модификации сплайнов (4).

**Теорема 4.** Если $f \in C^{(p)}[a; b]$, $p \ge 2$, то

$$\| B_{ns}^{p+1} f - f \| \le \frac{K(p)}{h^{p} s^{p/2}}\omega(f^{(p)}; \frac{b-a}{n\sqrt{s}}),$$

где $K(p)$ – константа, зависящая только от $p$, $\omega(f; \delta)$ – модуль непрерывности функции $f$.

**Доказательство.** Будем проводить его методом математической индукции. При $p = 2$

$$B_{ns}^{3}(f;x) = B_{ns}(f;x) - 0,5\cdot S_2(B_{ns};x)\cdot B_{ns}(f'';x).$$

Иначе, используя разложение по формуле Тейлора, запишем:

$$B_{ns}^{3}(f;x) = 0,5\cdot S_2(B_{ns};x)\cdot(f'' - B_{ns}(f'';x)) + $$
$$+ R_{n2}(f;x) + f(x).$$

По теореме 1 имеем, что

$$| B_{ns} f'' - f'' \| \le 2\omega(f''; \frac{b-a}{n\sqrt{s}}).$$

Тогда, воспользовавшись неравенством (1) и оценкой остаточного члена

$$| R_{n2}(f;x) | = | B_{ns}(r_p;x) | \le \frac{K(p)}{h^{p} s^{p/2}}\omega(f^{(p)}; \frac{b-a}{n\sqrt{s}}), \tag{5}$$

доказанной ранее в [8] для теоремы, обобщающей теорему 2, получим искомое неравенство.

Далее допустим, что оценка порядка приближения дифференцируемых функций операторами вида (4) верна для всех функций $f \in C^{(\nu-1)}[a; b]$, где $\nu = \overline{3, p}$, т. е.

$$\| B_{ns}^{\nu} f - f \| \le \frac{K(\nu)}{h^{\nu-1} s^{(\nu-1)/2}}\omega(f^{(\nu-1)}; \frac{b-a}{n\sqrt{s}}).$$

Тогда разность между оператором (4) и порождающей функцией можно представить в виде

$$B_{ns}^{p+1}(f;x) - f(x) = \sum_{k=2}^{p}\frac{1}{k!}\cdot S_k(B_{ns};x)\{f^{(k)}(x) - $$
$$- B_{ns}^{p+1-k}(f^{(k)};x)\} + R_{np}(f;x).$$

К выражению, стоящему в фигурных скобках, при $k = \overline{2, p-1}$ применимо индукционное допущение, а при $k = p$ в силу правила задания операторов (4) можно воспользоваться теоремой 1. Это и доказывает искомое утверждение.

Для получения теоремы типа Вороновской–Бернштейна введем следующие функции:

$l_{n0}(x) = S_0(B_{ns}; x)$, $l_{n1}(x) = S_{10}(B_{ns}; x)$,

$$l_{nm}(x) = \frac{1}{m!}S_m(B_{ns};x) - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\cdot S_k(B_{ns};x)\cdot l_{n,m-k}(x), \quad m \ge 2.$$

**Теорема 5.** Если $f \in C^{(p+1)}[a;b]$, $p \in N$, то

$$\| B_{ns}^{p+1} f - f - l_{n,p+1} f^{(p+1)} \| \le \frac{K(p)}{h^{p+1} s^{(p+1)/2}} \omega\left(f^{(p+1)}; \frac{b-a}{n\sqrt{s}}\right),$$

где $K(p)$ – константа, зависящая только от $p$, $\omega(f;\delta)$ – модуль непрерывности функции $f$.

**Доказательство.** База индукции следует из теоремы 2 и оценки (5) остаточного члена $R_{n2}(f;x)$.

Пусть теперь искомая оценка верна для всех $m = \overline{1,p}$. Тогда для функции $f \in C^{(p+1)}[a;b]$ запишем ее разложение по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранже до $(p+1)$-го члена включительно, прибавим и вычтем выражение

$$\sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k!} \cdot S_k\left(B_{ns};x\right) \cdot l_{n,p+1-k}(x).$$

Учтем также формулу задания функций $l_{nm}(x)$, $m \ge 2$. В результате получим:

$$B_{ns}^{p+1}(f;x) - f(x) - l_{n,p+1}(x) f^{(p+1)} =$$
$$= \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k!} \cdot S_k\left(B_{ns};x\right)\{f^{(k)}(x) - B_{ns}^{p+1-k}(f^{(k)};x) +$$
$$+ l_{n,p+1-k}(x) f^{(p+1)}\} + R_{n,p+1}(f;x).$$

Так как $f^{(k)} \in C^{(p+1-k)}[a;b]$, то для нахождения оценки левой части равенства достаточно воспользоваться индукционными допущениями и неравенствами (3) и (5). Тем самым теорема будет доказана.

Итак, доказано, что построенные бернштейновские модификации операторов $B_{ns}(f;x)$ для функции $f \in C^{(p)}[a;b]$ имеют существенно лучший порядок скорости сходимости, чем исходные сплайны. А из теоремы 5 следует, что с увеличением гладкости функции качество ее приближения с помощью построенных модификаций улучшается. Кроме того, если сравнить оценку (1), полученную для аналогичных модификаций классических многочленов Бернштейна в [2], с теоремой 4, то видим, что при $s \ge s_0(f)$ и $n \to +\infty$ скорость сходимости бернштейновских модификаций по сплайнам $B_{ns}(f;x)$ значительно выше, чем в случае классических многочленов $B_n(f;x)$.

## Список литературы


1. *Вороновская Е.В.* Определение асимптотического вида приближения функций многочленами С.Н. Бернштейна // Докл. акад. наук СССР, А. 1932. № 4. С. 79–85.
2. *Виденский В.С.* Многочлены Бернштейна. Л., 1990. 64 с.
3. *Пендина Т.П.* О приближении дифференцируемых функций бернштейновскими модификациями некоторых положительных операторов // Применение функционального анализа в теории приближений: сб. науч. тр. Калинин, 1987. С. 72–80.
4. *Ершова Т.В.* О приближении непрерывных функций модификациями линейных положительных операторов // Применение функционального анализа в теории приближений: сб. науч. тр. Тверь, 1997. С. 73–79.
5. *Половинкина Ю.С.* Обобщенные многочлены Бернштейна // Современные достижения в науке и образовании: математика и информатика: материалы междунар. науч.-практ. конф. Архангельск, 2010. С. 160–161.
6. *Kirov G.H.* A Generalization of the Bernstein Polynomials // Mathematica Balkanica. 1992. Vol. 6, № 2. P. 147–153.
7. *Джамалов М.Ш.* К одной теореме Е.В. Вороновской // Операторы и их приложения: сб. науч. тр. Л., 1985. С. 22–27.
8. *Половинкина Ю.С.* Об итерации сплайнов по многочленам Бернштейна // Вестн. Помор. ун-та. Сер.: Естеств. науки. 2009. № 1. С. 83–87.
9. *Половинкина Ю.С.* О модификациях Кирова для сплайнов по многочленам Бернштейна // Вестник математического факультета: межвуз. сб. науч. тр. Архангельск, 2011. Вып.10. С. 17–20.

## References


1. Voronovskaya E.V. Opredelenie asimptoticheskogo vida priblizheniya funktsiy mnogochlenami S.N. Bernshteyna [Determination of the Asymptotic Form of Approximation of Functions by the Bernstein Polynomials]. *Doklad Akademii nauk SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR]. Moscow, 1932, pp. 79–85.
2. Videnskiy V.S. *Mnogochleny Bernshteyna* [The Bernstein Polynomials]. Leningrad, 1990. 64 p.
3. Pendina T.P. O priblizhenii differentsiruemykh funktsiy bernshteynovskimi modifikatsiyami nekotorykh polozhitel'nykh operatorov [On the Differentiable Functions Approximation of Some Positive Operators by Bernstein Modifications]. *Primenenie funktsional'nogo analiza v teorii priblizheniy: sbornik nauchnykh trudov* [Application of Functional Analysis in the Approximation Theory: Proc.]. Kalinin, 1987, pp. 72–80.
4. Ershova T.V. O priblizhenii nepreryvnykh funktsiy modifikatsiyami lineynykh polozhitel'nykh operatorov [On Approximation of Continuous Functions by Modifications of Linear Positive Operators]. *Primenenie funktsional'nogo analiza v teorii priblizheniy: sbornik nauchnykh trudov* [Application of Functional Analysis in the Approximation Theory: Proc.]. Tver, 1997, pp. 73–79.
5. Polovinkina Yu.S. Obobshchennye mnogochleny Bernshteyna [The Generalized Bernstein Polynomials]. *Sovremennye dostizheniya v nauke i obrazovanii: matematika i informatika: materialy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Recent Advances in Science and Education: Mathematics and Computer Science: Proc. Int. Sci. Practical Conf.]. Arkhangelsk, 2010, pp. 160–161.
6. Kirov G.H. A Generalization of the Bernstein Polynomials. *Mathematica Balkanica*, 1992, vol. 6, no. 2, pp. 147–153.
7. Dzhamalov M.Sh. K odnoy teoreme E.V. Voronovskoy [On the Theorem of E.V. Voronovskaya]. *Operatory i ikh prilozheniya: sbornik nauchnikh trudov* [Operators and Their Applications: Proc.]. Leningrad, 1985, pp. 22–27.
8. Polovinkina Yu.S. Ob iteratsii splaynov po mnogochlenam Bernshteyna [Iteration of Splines Based on the Bernstein Polynomials]. *Vestnik Pomorskogo universiteta. Ser.: Estestvennye nauki*, 2009, pp. 83–87.
9. Polovinkina Yu.S. O modifikatsiyakh Kirova dlya splaynov po mnogochlenam Bernshteyna [On the Kirov Spline Modifications Based on the Bernstein Polynomials]. *Vestnik matematicheskogo facul'teta: mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov*. Arkhangelsk, 2011, no. 10, pp. 17–20.


***Polovinkina Yuliya Stanislavovna***
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
(Arkhangelsk, Russia)

## ITERATIVE SPLINE MODIFICATIONS BASED ON THE BERNSTEIN POLYNOMIALS

It is known that for the Bernstein polynomials and some of their classical generalizations belonging to the class of linear positive operators the order of approximation of these operators is not improved in the development of smoothness. The presence of the derivative of order above two ceases to affect on the degree of convergence of the Bernstein polynomials to the generating function. The Bernstein polynomials possess a remarkable property of simultaneous approximation to function and its derivatives. This fact makes them a convenient tool in the design of various numerical models (e.g., for the giving data approximation in computational algorithms). There are several approaches to the consecutive orders of polynomial operators, which would solve a problem of approximation rate of continuously differentiable functions. Most often the question is in the definition of some modifications of the initial polynomials, such as the consecutive orders of the Bernstein type, Kirov modifications. The paper proposes a fundamentally different method of generalization of classical polynomials, which allows maintaining their linearity and positivity, and the methods of proving theorems based on it. At the same time this method leads to the operators production, responding to the smoothness of the function. First the iterative splines are designed on the basis of the Bernstein polynomials. They have a higher degree of convergence to the generating function than the original operators. The relevant theorems of approximation of continuous and differentiable functions and the moment about mean estimation are presented. It is shown that the designed splines have the same disadvantage as the generator polynomials. The spline fitting with the derivative of order above two does not improve. We study the spline modifications with the essentially increasing order of convergence to the generating function in the development of smoothness. The paper studies the essential approximating properties of the obtained sequences of operators, proves the corresponding theorems of the Popovichiu and Voronovskaya–Bernstein theorem types.

***Keywords:*** *iterative spline, Bernstein polynomials, modifications.*

*Контактная информация:*
*адрес:* 163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68В;
*e-mail:* u.polovinkina@narfu.ru