УДК 517.927 DOI: 10.17238/issn2541-8416.2017.17.4.376

Поступила 23.06.2017

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

*С.И. Митрохин**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Москва)

Изучается краевая задача для дифференциального оператора высокого нечетного порядка. Потенциал оператора является суммируемой функцией на отрезке изучения оператора. Граничные условия заданы на границах отрезка и в нескольких внутренних точках, которые делят отрезок на несоизмеримые части. Таким образом, граничные условия являются многоточечными. Многоточечные граничные условия возникают при изучении колебаний мостов и балок, опоры которых находятся во внутренних точках. В статье найдена асимптотика решений соответствующего дифференциального уравнения при больших значениях спектрального параметра при условии суммируемости потенциала. Ранее асимптотика решений дифференциальных уравнений изучалась в случае гладких коэффициентов, затем – в случае кусочно-гладких коэффициентов. Асимптотические оценки в различных секторах комплексной плоскости получаются аналогично выводу оценок методом М.А. Наймарка. С помощью полученной асимптотики решений исследованы граничные условия. Это исследование приводит к системе однородных уравнений, которая имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Таким образом, выведено уравнение, которому удовлетворяют собственные значения изучаемого оператора. Изучена индикаторная диаграмма этого уравнения. Функция, которой удовлетворяют собственные значения, является целой в различных секторах индикаторной диаграммы. С помощью индикаторной диаграммы найдена асимптотика собственных значений исследуемого дифференциального оператора. Доказано, что спектр изучаемого оператора является дискретным. Показано, что у этого оператора не наблюдается эффект «расщепления» кратных в главном собственных значений. С помощью полученного спектра можно изучить поведение собственных функций исследуемого оператора.

Ключевые слова: *многоточечная краевая задача, спектральный параметр, многоточечные граничные условия, суммируемый потенциал, индикаторная диаграмма, асимптотика собственных значений.*

Контактное лицо: Митрохин Сергей Иванович, *адрес:* 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 4; *e-mail:* mitrokhin-sergey@yandex.ru

Для цитирования: Митрохин С.И. О спектральных свойствах многоточечной краевой задачи для дифференциального оператора нечетного порядка с суммируемым потенциалом // Arctic Environmental Research. 2017. Т. 17, № 4. С. 376–392. DOI: 10.17238/issn2541-8416.2017.17.4.376

1. Постановка задачи. Изучим следующую краевую задачу:

$$y^{(11)}(x)+q(x)\cdot y(x)=\lambda\cdot a^{11}\cdot y(x),\quad 0\le x\le\pi,\quad a>0, \tag{1}$$

с многоточечными граничными условиями

$$y(x_k)=0,\, x_k=m_k\cdot\pi,\, k=1,2,...,11,\, 0=m_1<m_2<m_3<...<m_{10}<m_{11}=1. \tag{2}$$

При этом предполагается, что потенциал $q(x)$ – суммируемая функция на отрезке $[0;\pi]$:

$$q(x)\in L_1[0;\pi](=)\left(\int_0^x q(t)\,dt\right)'_x=q(x) \tag{3}$$

почти для всех x из отрезка $[0;\pi]$.

Цель статьи – найти асимптотику собственных значений дифференциального оператора (1)–(2) с условием (3) суммируемости потенциала.

2. Исторический обзор. В современной спектральной теории дифференциальных операторов актуальной остается задача отыскания асимптотики собственных значений и собственных функций оператора в зависимости от гладкости коэффициентов дифференциального выражения. Также актуальна задача нахождения регуляризованных следов операторов. Для оператора второго порядка с дифференцируемым потенциалом основополагающие результаты получены в [1]. В работах [2–4] результаты [1] обобщены для случая операторов высших порядков с гладкими коэффициентами.

В [5] исследована сходимость разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора. В [6] рассмотрены спектральные свойства функционально-дифференциальных операторов с кусочно-гладкими коэффициентами, найдены асимптотики собственных значений и получены формулы регуляризованных следов. В [7] изучены необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка, в [8] – базисность корневых функций операторов с многоточечными краевыми условиями.

Авторами [9] рассмотрен оператор Штурма–Лиувилля с суммируемым потенциалом и найдены формулы для асимптотики собственных значений и собственных функций.

В [10] исследовалась локальная сходимость биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. В [11] результаты [9] обобщены для случая операторов порядка выше второго: получены асимптотики собственных значений и собственных функций для оператора шестого порядка с запаздывающим аргументом с суммируемым потенциалом. Авторами [12] проведен спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями. В [11] предварительно найдена асимптотика решений соответствующего дифференциального уравнения при больших значениях спектрального параметра, обобщающая результаты работы [13, гл. 2].

Операторы второго порядка с негладкими потенциалами (типа дельта-функции или потенциалами-распределениями) рассмотрены в [14–16]: были найдены асимптотики собственных значений и собственных функций, а также вычислена формула регуляризованного следа таких операторов. В [17, 18] на основе методики работ [14–16] исследовано асимптотическое поведение собственных значений операторов с потенциалом, являющимся дельта-функцией Дирака либо импульсными потенциалами (потенциалами-распределениями).

В [19] изучена обратная задача для дифференциальных операторов с обобщенными многоточечными граничными условиями. В [20] для оператора восьмого порядка (с суммируемым потенциалом) исследованы такие многоточечные граничные условия, при которых у спектра оператора наблюдается эффект «расщепления» кратных в главном собственных значений этого дифференциального оператора.

3. Асимптотика решений уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра. Введем следующие обозначения: $\lambda = s^{11}$, $s = \sqrt[11]{\lambda}$, причем $\sqrt[11]{1} = +1$. Пусть $w_k^{11} = 1$, т. е. $w_k = e^{\frac{2\pi i}{11}(k-1)}$, $k = 1, 2, \ldots, 11$, $w_k = w_{k+11}$, w_k – различные корни одиннадцатой степени из единицы:

$$w_1 = 1, w_2 = e^{\frac{2\pi i}{11}} = \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) =$$

$$= D_2 + iR_2, w_3 = e^{\frac{4\pi i}{11}} = \cos\left(\frac{4\pi}{11}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{11}\right) = D_3 + iR_3, \ \ldots \ . \tag{4}$$

Методами работ [10; 11; 13, гл. 2] доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет следующий вид:

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{11} C_k \cdot y_k(x,s); \; y^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{11} C_k \cdot y_k^{(m)}(x,s), \; m = 1, 2, \ldots, 10, \tag{5}$$

где $C_k (k = 1, 2, \ldots, 11)$ – произвольные постоянные, при этом асимптотика фундаментальной системы решений $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^{11}$ подчиняется следующим формулам и оценкам:

$$y_k(x,s) = \exp(aw_k sx) - \frac{A_{10,k}(x,s)}{11a^{10}s^{10}} + \underline{O}\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im} s| \cdot ax)}{s^{20}}\right), \; k = 1, 2, \ldots, 11, \tag{6}$$

$$A_{10,k}(x,s) = w_1 \exp(aw_1 sx) \cdot \int_0^x q(t) \cdot \exp(a(w_k - w_1)st) \cdot dt_{ak1} +$$

$$+ w_2 \cdot \exp(aw_2 sx) \cdot \int_0^x q(t) \cdot \exp(a(w_k - w_2)st) \cdot dt_{ak2} + \ldots$$

$$\ldots + w_{11} \cdot \exp(aw_{11} sx) \cdot \int_0^x q(t) \cdot \exp(a(w_k - w_{11})st) \cdot dt_{ak,11}, \; k = 1, 2, \ldots, 11; \tag{7}$$

$$y_k^{(m)}(x,s) = (as)^m \left\{ w_k^m \cdot \exp(aw_k sx) - \frac{A_{10,k}^m(x,s)}{11a^{10}s^{10}} + \underline{O}\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im} s| \cdot ax)}{s^{20}}\right) \right\},$$

$$k = 1, 2, \ldots, 11; m = 1, 2, \ldots, 10; \tag{8}$$

$$A_{10,k}^m(x,s) = \sum_{n=1}^{11} w_n^{m+1} \cdot \exp(aw_n sx) \cdot \left(\int_0^x \ldots\right)_{akn}, \; k = 1, 2, \ldots, 11; \; m = 1, 2, \ldots, 10. \tag{9}$$

4. Изучение граничных условий (2). Подставляя формулы (5) в граничные условия (2), имеем

$$y(x_n, s) \overset{(2)}{=} 0 (=) \sum_{k=1}^{11} C_k \cdot y_k(x_n, s) = 0 \; (n = 1, 2, \ldots, \; 11). \tag{10}$$

Система (10) представляет собой систему из одиннадцати однородных линейных уравнений с одиннадцатью неизвестными: C_1, C_2, …, C_{11}. По методу Крамера, такая система имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(3) имеет вид

$$f(s)=\begin{vmatrix} y_1(x_1,s) & y_2(x_1,s) & \ldots & y_{10}(x_1,s) & y_{11}(x_1,s) \\ y_1(x_2,s) & y_2(x_2,s) & \ldots & y_{10}(x_2,s) & y_{11}(x_2,s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1(x_{10},s) & y_2(x_{10},s) & \ldots & y_{10}(x_{10},s) & y_{11}(x_{10},s) \\ y_1(x_{11},s) & y_2(x_{11},s) & \ldots & y_{10}(x_{11},s) & y_{11}(x_{11},s) \end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

С использованием асимптотических формул (6)–(9) уравнение (11) переписывается в виде

$$f(s)=\begin{vmatrix} b_{11}(s) & b_{12}(s) & \ldots & b_{1,10}(s) & b_{1,11}(s) \\ b_{21}(s) & b_{22}(s) & \ldots & b_{2,10}(s) & b_{2,11}(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{11,1}(s) & b_{11,2}(s) & \ldots & b_{11,10}(s) & b_{11,11}(s) \end{vmatrix}=0, \tag{12}$$

$$b_{kn}(s)=\exp(aw_n x_k s)-\frac{A_{10,n}(x_k,s)}{11a^{10}\cdot s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{20}}\right),\ k,n=1,2,\ldots,11. \tag{13}$$

Разложим определитель $f(s)$ из (12) по столбцам на сумму определителей:

$$f(s)=f_0(s)-\frac{1}{11a^{10}\cdot s^{10}}\cdot\sum_{k=1}^{11}f_{10,k}(s)+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{20}}\right)=0, \tag{14}$$

при этом основное приближение имеет вид

$$f_0(s)=0, \tag{15}$$

$$f_0(s)=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1,10} & f_{1,11} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2,10} & f_{2,11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{10,1} & f_{10,2} & \ldots & f_{10,10} & f_{10,11} \\ f_{11,1} & f_{11,2} & \ldots & f_{11,10} & f_{11,11} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \exp(aw_1x_1s) & \exp(aw_2x_1s) & \ldots & \exp(aw_{10}x_1s) & \exp(aw_{11}x_1s) \\ \exp(aw_1x_2s) & \exp(aw_2x_2s) & \ldots & \exp(aw_{10}x_2s) & \exp(aw_{11}x_2s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \exp(aw_1x_{10}s) & \exp(aw_2x_{10}s) & \ldots & \exp(aw_{10}x_{10}s) & \exp(aw_{11}x_{10}s) \\ \exp(aw_1x_{11}s) & \exp(aw_2x_{11}s) & \ldots & \exp(aw_{10}x_{11}s) & \exp(aw_{11}x_{11}s) \end{vmatrix}, \tag{16}$$

определители $f_{10,k}(s)(k = 1, 2, \ldots, 11)$ формулы (14) получаются из определителя $f_0(s)$ формулы (16) заменой k-го столбца на столбец $(A_{10,k}(x_1, s); A_{10,k}(x_2, s); \ldots; A_{10,k}(x_{10}, s); A_{10,k}(x_{11}, s))^*$.

Формула (16) показывает, что между элементами $\exp(aw_n x_k s)$ и $f_{kn}(s)$, а также между $\exp(aw_n x_k s)$ и элементами $b_{kn}(s)$ из (12), (13) существует взаимно-однозначное соответствие.

Из формулы (16) находим

$$\begin{aligned} f_0(s) &= f_{11}f_{22}f_{33}\ldots f_{10,10}f_{11,11} - f_{11}f_{22}f_{33}\ldots f_{99}f_{10,11}f_{11,10} + \ldots = \\ &= \exp\left(as\left(w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \ldots + w_9x_9 + w_{10}x_{10} + w_{11}x_{11}\right)\right) - \\ &- \exp\left(as\left(w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \ldots + w_9x_9 + w_{11}x_{10} + w_{10}x_{11}\right)\right) - \ldots = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

т. е.

$$f_0(s) = \sum_{\gamma_k} \exp\left(as \cdot M_{\gamma_k}\right) \cdot (-1)^{b_k} = 0, \tag{18}$$

где γ_k – всевозможные перестановки чисел $\{1, 2, \ldots, 11\}$; b_k – знак этой перестановки,

$$M_{\gamma_k} = w_1 \cdot x_{\gamma_1} + w_2 \cdot x_{\gamma_2} + w_3 \cdot x_{\gamma_3} + \ldots + w_{10} \cdot x_{\gamma_{10}} + w_{11} \cdot x_{\gamma_{11}}. \tag{19}$$

Учитывая формулы (4), величина $M_{\gamma k}$ из (19) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} M_{\gamma_k} &= 1 \cdot x_{\gamma_1} + \left(D_2 + iR_2\right) \cdot x_{\gamma_2} + \left(D_3 + iR_3\right) \cdot x_{\gamma_3} + \\ &+ \left(D_4 + iR_4\right) \cdot x_{\gamma_4} + \ldots + \left(D_4 - iR_4\right) \cdot x_{\gamma_9} + \left(D_3 - iR_3\right) \cdot x_{\gamma_{10}} + \\ &+ \left(D_2 - iR_2\right) \cdot x_{\gamma_{11}} = \mathrm{Re}\left(M_{\gamma_k}\right) + i\,\mathrm{Im}\left(M_{\gamma_k}\right), \gamma_k \in \{1, 2, \ldots, 11\}; \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(M_{\gamma_k}\right) &= 1 \cdot x_{\gamma_1} + D_2\left(x_{\gamma_2} + x_{\gamma_{11}}\right) + D_3\left(x_{\gamma_3} + x_{\gamma_{10}}\right) + \\ &+ D_4\left(x_{\gamma_4} + x_{\gamma_9}\right) + D_5\left(x_{\gamma_5} + x_{\gamma_8}\right) + \\ &+ D_6\left(x_{\gamma_6} + x_{\gamma_7}\right); -1 < D_6 < D_5 < D_4 < D_3 < D_2 < 1; \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left(M_{\gamma_k}\right) &= 0 \cdot x_{\gamma_1} + R_2\left(x_{\gamma_2} - x_{\gamma_{11}}\right) + R_3\left(x_{\gamma_3} - x_{\gamma_{10}}\right) + \\ &+ R_4\left(x_{\gamma_4} - x_{\gamma_9}\right) + R_5\left(x_{\gamma_5} - x_{\gamma_8}\right) + R_6\left(x_{\gamma_6} - x_{\gamma_7}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

5. Индикаторная диаграмма уравнения (14)–(16). Для нахождения асимптотики корней уравнений (11)–(14) сначала необходимо решить уравнение (15), где функция $f_0(s)$ определена в (16), а для этого надо изучить индикаторную диаграмму (см. [21, гл. 12]) этого уравнения. При исследовании индикаторной диаграммы следует подробно изучить уравнения (17)–(19), т. е. поведение величин $M_{\gamma k}$ из (20) и $\mathrm{Re}\left(M_{\gamma_k}\right)$, $\mathrm{Im}\left(M_{\gamma_k}\right)$ из (21), (22). Сначала найдем ответ на вопрос, когда достигается $\max\left(\mathrm{Re}\left(M_{\gamma_k}\right)\right)$.

Из формулы (21) следует, что это происходит в следующих случаях:

$$\begin{gathered} x_{\gamma_1} = m_{11} \cdot \pi = 1 \cdot \pi;\ x_{\gamma_2} = m_{10} \cdot \pi \vee m_9 \cdot \pi;\ x_{\gamma_{11}} = m_{10} \cdot \pi \vee m_9 \cdot \pi;\ x_{\gamma_3} = m_8 \cdot \pi \vee m_7 \cdot \pi;\ x_{\gamma_{10}} = m_8 \cdot \pi \vee m_7 \cdot \pi; \\ x_{\gamma_4} = m_6 \cdot \pi \vee m_5 \cdot \pi;\ x_{\gamma_9} = m_6 \cdot \pi \vee m_5 \cdot \pi;\ x_{\gamma_5} = m_4 \cdot \pi \vee m_3 \cdot \pi;\ x_{\gamma_8} = m_4 \cdot \pi \vee m_3 \cdot \pi; \\ x_{\gamma_6} = m_2 \cdot \pi \vee m_1 \cdot \pi,\ m_1 \cdot \pi = 0;\ x_{\gamma_7} = m_2 \cdot \pi \vee m_1 \cdot \pi,\ m_1 \cdot \pi = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Из соотношений (23) следует, что на вертикальном отрезке $[B_1B_2]$ индикаторной диаграммы уравнения (15) расположены 32 точки $A_1, A_2, \ldots, A_{32}$ (при этом $A_1 = B_1$, $A_{32} = B_2$), координаты которых определяются формулами (20)–(22) и по которым в силу выражений (17)–(19) находятся соответствующие им элементы определителей (16) и (12)–(13). Из общей теории (см. [21, гл. 12]) следует, что отрезку $[B_1B_2]$ соответствует сектор T_1 бесконечно малого раствора, биссектрисой которого является срединный перпендикуляр к отрезку $[B_1B_2]$, и корни уравнений (15)–(16) и (12)–(13) могут находиться только в секторе T_1, на асимптотику корней влияют только точки $A_1, A_2, \ldots, A_{32}$ отрезка $[B_1B_2]$. Исследование точек $A_1, A_2, \ldots, A_{32}$ из (23) показало, что уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(3) в секторе T_1 представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} g_1(s) = {} & b_{16}\cdot b_{27}\cdot b_{35}\cdot b_{48}\cdot b_{54}\cdot b_{69}\cdot b_{7,3}\cdot b_{8,10}\cdot b_{9,2}\cdot b_{10,11}\cdot b_{11,1} - \\ & - b_{17}\cdot b_{26}\cdot b_{35}\cdot b_{48}\cdot b_{54}\cdot b_{69}\cdot b_{7,3}\cdot b_{8,10}\cdot b_{9,2}\cdot b_{10,11}\cdot b_{11,1} + \\ & + b_{17}\cdot b_{26}\cdot b_{38}\cdot b_{45}\cdot b_{54}\cdot b_{69}\cdot b_{7,3}\cdot b_{8,10}\cdot b_{9,2}\cdot b_{10,11}\cdot b_{11,1} - \\ & - b_{16}\cdot b_{27}\cdot b_{38}\cdot b_{45}\cdot b_{54}\cdot b_{69}\cdot b_{7,3}\cdot b_{8,10}\cdot b_{9,2}\cdot b_{10,11}\cdot b_{11,1} + \ldots = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Основное приближение уравнения (24) имеет корень кратности 5, поэтому у спектра дифференциального оператора (1)–(3) возможен «эффект “расщепления” кратных в главном собственных значений», рассмотренный автором в статье [20].

Теорема 3. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(3) в секторе T_1 индикаторной диаграммы имеет вид

$$\begin{aligned} g_1(s) = {} & \begin{vmatrix} b_{16} & b_{17} \\ b_{26} & b_{27} \end{vmatrix}_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} b_{35} & b_{38} \\ b_{45} & b_{48} \end{vmatrix}_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} b_{54} & b_{59} \\ b_{64} & b_{69} \end{vmatrix}_{1,3} \times \\ & \times \begin{vmatrix} b_{7,3} & b_{7,10} \\ b_{8,3} & b_{8,10} \end{vmatrix}_{1,4} \cdot \begin{vmatrix} b_{9,2} & b_{9,11} \\ b_{10,2} & b_{10,11} \end{vmatrix}_{1,5} \cdot b_{11,1} = 0, \quad b_{11,1} = b_{11,12}, \end{aligned} \tag{25}$$

т. к. мы ввели обозначение

$$b_{mn} = b_{m,n+11},\ m, n \in \{1, 2, \ldots, 11\}. \tag{26}$$

Изучение индикаторной диаграммы показало, что в секторах T_3 и T_5 индикаторной диаграммы уравнения на собственные значения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} g_3(s) = {} & \begin{vmatrix} b_{17} & b_{18} \\ b_{27} & b_{28} \end{vmatrix}_{3,1} \cdot \begin{vmatrix} b_{36} & b_{39} \\ b_{46} & b_{49} \end{vmatrix}_{3,2} \cdot \begin{vmatrix} b_{55} & b_{5,10} \\ b_{65} & b_{6,10} \end{vmatrix}_{3,3} \times \\ & \times \begin{vmatrix} b_{74} & b_{7,11} \\ b_{84} & b_{8,11} \end{vmatrix}_{3,4} \cdot \begin{vmatrix} b_{9,3} & b_{9,12} \\ b_{10,3} & b_{10,12} \end{vmatrix}_{3,5} \cdot b_{11,2} = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

причем $b_{11,2} \neq 0$ в силу формул (16) и (12), (13);

$$\begin{aligned} g_5(s) = {} & \begin{vmatrix} b_{18} & b_{19} \\ b_{28} & b_{29} \end{vmatrix}_{5,1} \cdot \begin{vmatrix} b_{37} & b_{3,10} \\ b_{47} & b_{4,10} \end{vmatrix}_{5,2} \cdot \begin{vmatrix} b_{56} & b_{5,11} \\ b_{66} & b_{6,11} \end{vmatrix}_{5,3} \times \\ & \times \begin{vmatrix} b_{75} & b_{7,12} \\ b_{85} & b_{8,12} \end{vmatrix}_{5,4} \cdot \begin{vmatrix} b_{9,4} & b_{9,13} \\ b_{10,4} & b_{10,13} \end{vmatrix}_{5,5} \cdot b_{11,14} = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

при этом $b_{11,14} = b_{11,3} \neq 0$.

Исследуя остальные нечетные сектора индикаторной диаграммы аналогично получению уравнений (25)–(28), приходим к выводу, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(3) в нечетных секторах T_{2p-1} индикаторной диаграммы имеет вид

$$g_{2p-1}(s)=\begin{vmatrix} b_{1,5+p} & b_{1,6+p} \\ b_{2,5+p} & b_{2,6+p} \end{vmatrix}_{2p-1,1} \cdot \begin{vmatrix} b_{3,4+p} & b_{3,7+p} \\ b_{4,4+p} & b_{4,7+p} \end{vmatrix}_{2p-1,2} \times$$
$$\times \begin{vmatrix} b_{5,3+p} & b_{5,8+p} \\ b_{6,3+p} & b_{6,8+p} \end{vmatrix}_{2p-1,3} \cdot \begin{vmatrix} b_{7,p+2} & b_{7,p-2} \\ b_{8,p+2} & b_{8,p-2} \end{vmatrix}_{2p-1,4} \times$$
$$\times \begin{vmatrix} b_{9,p+1} & b_{9,p-1} \\ b_{10,p+1} & b_{10,p-1} \end{vmatrix}_{2p-1,5} \cdot b_{2p-1,6}=0, \tag{29}$$

где T_{2p-1} – номер сектора индикаторной диаграммы, $p = 1, 2, 3, \dots, 11$; $b_{11,p} \neq 0$.

Формулу (29) можно переписать следующим образом:

$$g_{2p-1}(s)=b_{11,6}\cdot\prod_{n=1}^{5} g_{2p-1,n}(s)=0, \quad b_{11,6}\neq 0, \tag{30}$$

$$g_{2p-1,n}(s)=\begin{vmatrix} b_{2n-1,6+p-n}(s) & b_{2n-1,5+p-n}(s) \\ b_{2n,6+p-n}(s) & b_{2n,5+p-n}(s) \end{vmatrix}_{2p-1,n}=0, \tag{31}$$

при этом T_{2p-1} – номер сектора; n – номер серии собственных значений в секторе T_{2p-1}; $p =$ $= 1, 2, \dots, 11$; $n = 1, 2, \dots, 6$.

6. Асимптотика собственных значений. Уравнение (30)–(31) позволяет вычислить асимптотику собственных значений дифференциального оператора (1)–(3) в нечетных секторах. Подставляя формулы (13) в уравнение (31), получаем

$$g_{2p-1,n}(s)=b_{2n-1,6+p-n}(s)\cdot b_{2n,5+p+n}(s)-b_{2n-1,5+p+n}(s)\cdot b_{2n,6+p-n}(s)=$$
$$=\left[\exp\left(aw_{6+p-n}x_{2n-1}s\right)-\frac{A_{10,6+p-n}(x_{2n-1},s)}{P_6\cdot s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{20}}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\exp\left(aw_{5+p+n}x_{2n}s\right)-\frac{A_{10,5+p+n}(x_{2n},s)}{P_6\cdot s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{20}}\right)\right]-$$
$$-\left[\exp\left(aw_{5+p+n}x_{2n-1}s\right)-\frac{A_{10,5+p+n}(x_{2n-1},s)}{P_6\cdot s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{20}}\right)\right]\cdot\left[\exp\left(aw_{6+p-n}x_{2n}s\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{A_{10,6+p-n}(x_{2n},s)}{P_6\cdot s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{20}}\right)\right]=0,\ P_6=11a^{10};\ p=1,2,\dots,11;\ n=1,2,\dots,6. \tag{32}$$

Перепишем уравнение (32) в следующем виде:

$$g_{2p-1,n}(s) = g_{2p-1,n,0}(s) - \frac{1}{P_6 \cdot s^{10}} \cdot g_{2p-1,n,10}(s) + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{20}}\right) = 0,\ P_6 = 11a^{10}, \tag{33}$$

$$g_{2p-1,n,0}(s) = \exp\left(aw_{6+p-n}x_{2n-1}s\right) \cdot \exp\left(aw_{5+p+n}x_{2n}s\right) - \exp\left(aw_{5+p+n}x_{2n-1}s\right) \cdot \exp\left(aw_{6+p-n}x_{2n}s\right); \tag{34}$$

$$\begin{aligned} g_{2p-1,n,10}(s) = \exp\left(aw_{6+p-n}x_{2n-1}s\right) \cdot A_{10,5+p+n}(x_{2n}, s) - \\ - \exp\left(aw_{5+p+n}x_{2n}s\right) \cdot A_{10,6+p-n}(x_{2n-1}, s) - \exp\left(aw_{5+p+n}x_{2n-1}s\right) \cdot A_{10,6+p-n}(x_{2n}, s) - \\ - \exp\left(aw_{6+p-n}x_{2n}s\right) \cdot A_{10,5+p+n}(x_{2n-1}, s). \end{aligned} \tag{35}$$

Поделив в уравнении (33)–(35) левую и правую части на функцию $\exp(aw_{5+p+n}x_{2n-1}s) \times$ $\times \exp(aw_{5+p-n}x_{2n}s) \neq 0$, находим

$$f_{2p-1,n}(s) = f_{2p-1,n,0}(s) - \frac{f_{2p-1,n,10}(s)}{P_6 \cdot s^{10}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{20}}\right) = 0, \tag{36}$$

$$f_{2p-1,n,0}(s) = \exp\left(a\left(w_{5+p+n} - w_{6+p-n}\right) \cdot \left(x_{2n} - x_{2n-1}\right)s\right) - 1 \tag{37}$$

(основное приближение при этом имеет вид $f_{2p-1,n,0}(s) = 0$);

$$\begin{aligned} f_{2p-1,n,10}(s) = \exp\left(-aw_{5+p+n}x_{2n-1}s\right) \cdot \exp\left(-aw_{6+p-n}\left(x_{2n} - x_{2n-1}\right)s\right) \cdot A_{10,5+p+n}(x_{2n}, s) - \\ - \exp\left(aw_{5+p+n}\left(x_{2n} - x_{2n-1}\right)s\right) \cdot \exp\left(-aw_{6+p-n}x_{2n}s\right) \cdot A_{10,6+p-n}(x_{2n-1}, s) - \\ - \exp\left(-aw_{6+p-n}x_{2n}s\right) \cdot A_{10,6+p-n}(x_{2n}, s) - \exp\left(-aw_{5+p+n}x_{2n-1}s\right) \cdot A_{10,5+p+n}(x_{2n-1}, s). \end{aligned} \tag{38}$$

Отметим, что $A_{10,k}(x, s)$ задаются формулами (6)–(9), при этом в секторе T_{2p-1} на асимптотику корней влияют только экспоненты, зависящие от величин w_{6+p-n} и w_{5+p+n}:

$$\begin{aligned} A_{10,5+p+n}(x_{2n}, s) = w_{6+p-n} \cdot \exp\left(aw_{6+p-n}x_{2n}s\right) \cdot \left(\int_0^{x_{2n}} \ldots\right)_{a,5+p+n,6+p-n} + w_{5+p+n} \times \\ \times \exp\left(aw_{5+p+n}x_{2n}s\right) \cdot \left(\int_0^{x_{2n}} \ldots\right)_{a,5+p+n,5+p+n} + \overset{=}{o}(1); \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} A_{10,6+p-n}(x_{2n-1}, s) = w_{6+p-n} \cdot \exp\left(aw_{6+p-n}x_{2n-1}s\right) \cdot \left(\int_0^{x_{2n-1}} \ldots\right)_{a,6+p-n,6+p-n} + w_{5+p+n} \times \\ \times \exp\left(aw_{5+p+n}x_{2n-1}s\right) \cdot \left(\int_0^{x_{2n-1}} \ldots\right)_{a,6+p-n,5+p+n} + \overset{=}{o}(1); \end{aligned} \tag{40}$$

$$A_{10,6+p-n}\left(x_{2n},s\right)=w_{6+p-n}\cdot\exp\left(aw_{6+p-n}x_{2n}s\right)\cdot\left(\int\limits_0^{x_{2n-1}}\dots\right)_{a,6+p-n,6+p-n}+w_{5+p+n}\times$$
$$\times\exp\left(aw_{5+p+n}x_{2n}s\right)\cdot\left(\int\limits_0^{x_{2n-1}}\dots\right)_{a,6+p-n,5+p+n}+\overset{=}{o}(1); \tag{41}$$

$$A_{10,5+p+n}\left(x_{2n-1},s\right)=w_{6+p-n}\cdot\exp\left(aw_{6+p-n}x_{2n-1}s\right)\cdot\left(\int\limits_0^{x_{2n-1}}\dots\right)_{a,5+p+n,6+p-n}+w_{5+p+n}\times$$
$$\times\exp\left(aw_{5+p+n}x_{2n-1}s\right)\cdot\left(\int\limits_0^{x_{2n-1}}\dots\right)_{a,5+p+n,5+p+n}+\overset{=}{o}(1). \tag{42}$$

Заметим, что $\left(\int\limits_0^{x_{2n-1}}\dots\right)_{a,m,m}=\left(\int\limits_0^{x}q(t)\,dt\right)_{a11}$ (это следует из формулы (7)), подставим формулы (39)–(42) в формулу (38), проведем необходимые преобразования, получим

$$f_{2p-1,n,10}(s)=M_{1n}\cdot F\left(-x_{2n-1}\right)\cdot G\left(0,x_{2n},N_2,N_1\right)+M_{2n}\cdot F\left(x_{2n}-x_{2n-1}\right)\cdot G\left(0,x_{2n},N_2,N_2\right)+$$
$$+M_{1n}\cdot F\left(x_{2n}-x_{2n-1}\right)\cdot G\left(0,x_{2n-1},N_1,N_1\right)+M_{2n}\cdot F\left(x_{2n}\right)\cdot G\left(0,x_{2n-1},N_1,N_2\right)-M_{1n}\times$$
$$\times G\left(0,x_{2n},N_1,N_1\right)-M_{2n}\cdot F\left(x_{2n}\right)\cdot G\left(0,x_{2n},N_1,N_2\right)-M_{1n}\cdot\left(x_{2n}-x_{2n-1}\right)\cdot G\left(0,x_{2n-1},N_2,N_1\right)-$$
$$-M_{2n}\cdot G\left(0,x_{2n-1},N_2,N_2\right)+\overset{=}{o}(1), \tag{43}$$

где нами введены обозначения

$$M_{1n}=w_{6+p-n};M_{2n}=w_{5+p+n};F(x,s)=\exp\left(a\left(M_{2n}-M_{1n}\right)xs\right);N_1=N+p-n;$$
$$N_2=N+p+n;\ G(b,c,k,m)=\int\limits_b^c q(t)\cdot\exp\left(a\left(w_k-w_m\right)st\right)\cdot dt_{akm}. \tag{44}$$

Основное приближение уравнения (36)–(38) имеет вид

$$f_{2p-1,n,0}(s)=0(=)F\left(x_{2n}-x_{2n-1}\right)=0(=)\exp\left(a\left(M_{2n}-M_{1n}\right)xs\right)=1=\exp(2\pi ik),k\in N(=)$$
$$(=)s_{k,2p-1,n,\boldsymbol{осн}}=\frac{2\pi ik}{a\left(M_{2n}-M_{1n}\right)\left(x_{2n}-x_{2n-1}\right)},k\in N, \tag{45}$$

где T_{2p-1} – номер сектора; n – номер серии собственных значений оператора (1)–(3) в секторе T_{2p-1}; p = 1, 2, …, 11; n = 1, 2, …, 5. Поэтому справедливо следующее утверждение (см. [3, 22]).

Теорема 5. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(3) в нечетных секторах T_{2p-1} (p = 1, 2, …, 11) индикаторной диаграммы имеет вид

$$s_{k,2p-1,n}=\frac{2\pi i}{a\left(M_{2n}-M_{1n}\right)\left(x_{2n}-x_{2n-1}\right)}\cdot\left[k+\frac{d_{10,k,2p-1,n}}{k^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{20}}\right)\right],$$
$$k\in N;p\in\{1,2,3,...,11\};n\in\{1,2,...,6\}. \tag{46}$$

Чтобы доказать теорему 5, нужно вычислить коэффициенты $d_{10,k,2p-1,n}$ из (46) в явном виде.

В силу формул (44) и (46) находим

$$F\left(x_{2n}-x_{2n-1}\right)\Big|_{s_{k,2p-1,n}}=\exp\left(a\left(M_{2n}-M_{1n}\right)\left(x_{2n}-x_{2n-1}\right)s_{k,2p-1,n}\right)=\exp\left(2\pi ik\right)\times$$
$$\times\exp\left(2\pi i\left[\frac{d_{10,k,2p-1,n}}{k^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{20}}\right)\right]\right)=1\cdot\left[1+\frac{2\pi id_{10,k,2p-1,n}}{k^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{20}}\right)\right], \qquad (47)$$

асимптотики получены с применением формулы Тейлора.

Подставим формулы (46), (47) в уравнение (36)–(38), учтем формулы (43), (44). Выводим, применяя формулы Тейлора:

$$\left[1+\frac{2\pi id_{10,k,2p-1,n}}{k^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{20}}\right)-1\right]-\frac{a^{10}\cdot\left(M_{2n}-M_{1n}\right)^{10}}{11\cdot a^{10}\cdot 2^{10}}\cdot\frac{\left(x_{2n}-x_{2n-1}\right)^{10}}{\pi^{10}\cdot i^{10}}\cdot\frac{1}{k^{10}}\times$$
$$\times\left[1+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{11}}\right)\right]\cdot f_{2p-1,n,10}\Big|_{s_{k,2p-1,n}}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{20}}\right)=0,\ p=1,2,...,11;n=1,2,...,6;k\in Z. \qquad (48)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k, видим:

$$d_{10,k,2p-1,n}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{\left(M_{2n}-M_{1n}\right)^{10}}{2^{10}\cdot\pi^{10}}\cdot\frac{\left(x_{2n}-x_{2n-1}\right)^{10}}{i^{10}}\cdot f_{2p-1,n,10}\left(s\right)\Big|_{s_{k,2p-1,n,\textbf{осн}}}, \qquad (49)$$

где $s_{k,2p-1,n,\text{осн}}$ задано формулой (45).

Из формул (4) находим

$$M_{2n}-M_{1n}=w_{5+p+n}-w_{6+p-n}=\exp\left(\frac{2\pi i}{11}\left(4+p+n\right)\right)-\exp\left(\frac{2\pi i}{11}\left(5+p-n\right)\right)=$$
$$=\exp\left(\frac{2\pi i}{11}\left(6+p-\frac{3}{2}\right)\right)\cdot\left[\exp\left(\frac{2\pi i}{11}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)-\exp\left(\frac{2\pi i}{11}\left(-n+\frac{1}{2}\right)\right)\right]=$$
$$=\exp\left(\frac{2\pi i}{11}\left(6+p-\frac{3}{2}\right)\right)\cdot 2i\sin\left(\frac{2\pi i}{11}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right),\ n=1,2,...,6. \qquad (50)$$

Подставим формулу (45) в (43)–(44), произведем необходимые преобразования:

$$f_{2p-1,n,2N-2}\left(s\right)\Big|_{s_{k,2p-1,n,\textbf{осн}}}=\left(M_{2n}-M_{1n}\right)\cdot G\left(x_{2n-1},x_{2n},1,1\right)+H_{2p-1,n,10}\left(s\right)\Big|_{s_{k,2p-1,n,\textbf{осн}}}, \qquad (51)$$

$$H_{2p-1,n,10}\left(s\right)\Big|_{s_{k,2p-1,n,\textbf{осн}}}=M_{1n}\cdot F\left(-x_{2n-1}\right)\cdot G\left(x_{2n-1},x_{2n},N_2,N_1\right)-M_{2n}\cdot F\left(x_{2n}\right)\cdot G\left(x_{2n-1},x_{2n},N_1,N_2\right). \qquad (52)$$

Подставляя величины $s_{k,2p-1,n,\text{осн}}$ из (45) в формулу (52), находим

$$H_{2p-1,n,10}\left(s\right)\Big|_{s_{k,2p-1,n,\textbf{осн}}}=\exp\left(\frac{2\pi i}{11}\left(N_1-1\right)\right)\cdot F\left(\frac{x_{2n}-x_{2n-1}}{2}\right)\cdot F\left(-\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{2}\right)\cdot G\left(x_{2n-1},x_{2n},N_2,N_1\right)\Big|_{s_{k,2p-1,n,\textbf{осн}}}-$$
$$-\exp\left(\frac{2\pi i}{11}\left(N_2-1\right)\right)\cdot F\left(\frac{x_{2n}-x_{2n-1}}{2}\right)\cdot F\left(\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{2}\right)\cdot G\left(x_{2n-1},x_{2n},N_1,N_2\right)\Big|_{s_{k,2p-1,n,\textbf{осн}}}. \qquad (53)$$

Из формул (45) и (44) видим:

$$F\left(\frac{x_{2n}-x_{2n-1}}{2}\right)\Bigg|_{s_{k,2n-1,n,\boldsymbol{осн}}}=\exp(\pi ik)=(-1)^k,$$

поэтому выражение (53) преобразуем к более удобному виду:

$$H_{2p-1,n,10}\Big|_{s_{k,2p-1,n,\boldsymbol{осн}}}=(-1)^k\cdot\exp\left(\frac{2\pi i}{11}\left(6+p-\frac{3}{2}\right)\right)\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\frac{2\pi i}{11}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot\exp\left(-\pi ik\cdot\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{x_{2n}-x_{2n-1}}\right)\cdot\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)\cdot\exp\left(\frac{2\pi ik}{x_{2n}-x_{2n-1}}t\right)dt-\right.$$

$$\left.-\exp\left(\frac{2\pi i}{11}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot\exp\left(\pi ik\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{x_{2n}-x_{2n-1}}\right)\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)\cdot\exp\left(-\frac{2\pi ik}{x_{2n}-x_{2n-1}}t\right)dt\right]=$$

$$=(-1)^k\,2i\exp\left(\frac{2\pi i}{11}\left(6+p-\frac{3}{2}\right)\right)\Phi_n,$$

$$\Phi_n=\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)\sin\left[\frac{2\pi k}{x_{2n}-x_{2n-1}}t-\frac{\pi(2n-1)}{11}-\pi k\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{x_{2n}-x_{2n-1}}\right]dt;\,p=1,2,...,11;\,n=1,2,...,6. \tag{54}$$

Подставляя формулы (54) в (52), используя формулы (50), находим

$$f_{2p-1,n,10}(s)\Big|_{s_{k,2p-1,n,\boldsymbol{осн}}}=(M_{2n}-M_{1n})\left[\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)\,dt_{a11}+\frac{(-1)^k}{\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{11}\right)}\cdot\Phi_n\right]. \tag{55}$$

Подставляя формулу (55) в формулу (49), применяя формулы (50) и (54), имеем

$$d_{10,k,2p-1,n}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{(M_{2n}-M_{1n})^{11}}{2^{10}\cdot\pi^{10}}\cdot\frac{(x_{2n}-x_{2n-1})^{10}}{(-1)^5}\cdot\left[\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)\,dt_{a11}+\frac{(-1)^k}{\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{11}\right)}\Phi_1\right]_1=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{(x_{2n}-x_{2n-1})^{10}}{2^{10}\cdot\pi^{10}}\cdot(-1)^5\cdot\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{11}\left(6+p-\frac{3}{2}\right)\right)\right)^{11}\cdot2^{11}\cdot i^{11}\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{11}\right)\right)^{11}\cdot[...]_1. \tag{56}$$

Из (56) получим $d_{10,k,2p-1,n}$ в явном виде, что завершает доказательство теоремы 5:

$$d_{10,k,2p-1,n}=(-1)^6\cdot\frac{(x_{2n}-x_{2n-1})^{60}}{11\cdot\pi^{2n-1}}\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{11}\right)\right)^{11}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)\,dt_{a11}+\frac{(-1)^k}{\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{11}\right)}\cdot\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)\sin\left[\frac{2\pi k}{x_{2n}-x_{2n-1}}t-\frac{\pi(2n-1)}{11}-\pi k\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{x_{2n}-x_{2n-1}}\right]dt_{\Phi_n}\right],$$

$$k\in N;\ p=1,2,...,11;\ n=1,2,...,5. \tag{57}$$

Здесь T_{2p-1} – номер сектора; n – номер серии собственных значений в этом секторе.

Применяя формулу (50), формулу (46) перепишем в следующем виде:

$$s_{k,2p-1,n}=\frac{\pi}{a}\cdot\frac{\exp\left(-\frac{2\pi i}{11}\left(6+p-\frac{3}{2}\right)\right)}{(x_{2n}-x_{2n-1})\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{11}\right)}\cdot\left[k+\frac{d_{10,k,2p-1,n}}{k^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{20}}\right)\right], \tag{58}$$

коэффициенты $d_{10,k,2p-1,n}$ определены формулой (57).

Изучение индикаторной диаграммы уравнений (11)–(13) и (16)–(18) с помощью формул (19)–(22) приводит к доказательству следующего утверждения.

Теорема 6. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(3) в секторе T_2 имеет вид

$$h_2(s)=b_{17}\cdot\begin{vmatrix}b_{26}&b_{28}\\b_{36}&b_{38}\end{vmatrix}_{2,1}\cdot\begin{vmatrix}b_{45}&b_{49}\\b_{55}&b_{59}\end{vmatrix}_{2,2}\cdot\begin{vmatrix}b_{64}&b_{6,10}\\b_{74}&b_{7,10}\end{vmatrix}_{2,3}\cdot\begin{vmatrix}b_{83}&b_{8,11}\\b_{93}&b_{9,11}\end{vmatrix}_{2,4}\cdot\begin{vmatrix}b_{10,2}&b_{10,12}\\b_{11,2}&b_{11,12}\end{vmatrix}_{2,5}=0, \tag{59}$$

при этом $b_{10,12}=b_{10,1}$, $b_{11,12}=b_{11,1}$ в силу обозначений формулы (26).

Таким же образом доказывается, что в секторах 4) и 6) уравнения на собственные значения имеют следующий вид:

$$h_4(s)=b_{18}\cdot\begin{vmatrix}b_{27}&b_{29}\\b_{37}&b_{39}\end{vmatrix}_{4,1}\cdot\begin{vmatrix}b_{46}&b_{4,10}\\b_{56}&b_{5,10}\end{vmatrix}_{4,2}\cdot\begin{vmatrix}b_{65}&b_{6,11}\\b_{75}&b_{7,11}\end{vmatrix}_{4,3}\cdot\begin{vmatrix}b_{8,4}&b_{8,12}\\b_{9,4}&b_{9,12}\end{vmatrix}_{4,4}\cdot\begin{vmatrix}b_{10,3}&b_{10,13}\\b_{11,3}&b_{11,13}\end{vmatrix}_{4,5}=0; \tag{60}$$

$$h_6(s)=b_{19}\cdot\begin{vmatrix}b_{28}&b_{2,10}\\b_{38}&b_{3,10}\end{vmatrix}_{6,1}\cdot\begin{vmatrix}b_{47}&b_{4,11}\\b_{57}&b_{5,11}\end{vmatrix}_{6,2}\cdot\begin{vmatrix}b_{66}&b_{6,12}\\b_{76}&b_{7,12}\end{vmatrix}_{6,3}\cdot\begin{vmatrix}b_{8,5}&b_{8,13}\\b_{9,5}&b_{9,13}\end{vmatrix}_{6,4}\cdot\begin{vmatrix}b_{10,4}&b_{10,14}\\b_{11,4}&b_{11,14}\end{vmatrix}_{6,5}=0. \tag{61}$$

Обобщая формулы (59)–(61), приходим к теореме.

Теорема 7. В четных секторах T_{2p} (p = 1, 2, …, 11) индикаторной диаграммы уравнения на собственные значения имеют следующий вид:

$$h_{2p}(s)=b_{1,6+p}(s)\cdot\begin{vmatrix} b_{2,5+p} & b_{2,7+p} \\ b_{3,5+p} & b_{3,7+p}\end{vmatrix}_{2p,1}\cdot\begin{vmatrix} b_{4,4+p} & b_{4,8+p} \\ b_{5,4+p} & b_{5,8+p}\end{vmatrix}_{2p,2}\cdot\begin{vmatrix} b_{6,3+p} & b_{6,9+p} \\ b_{7,3+p} & b_{7,9+p}\end{vmatrix}_{2p,3}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} b_{8,p+2} & b_{8,10+p} \\ b_{9,p+2} & b_{9,10+p}\end{vmatrix}_{2p,4}\cdot\begin{vmatrix} b_{10,p+1} & b_{10,11+p} \\ b_{11,p+1} & b_{11,11+p}\end{vmatrix}_{2p,5}=0,\ p=1,2,...,11. \tag{62}$$

Уравнение (62) можно переписать следующим образом:

$$h_{2p}(s)=b_{1,6+p}(s)\cdot\prod_{n=1}^{5}h_{2p,n}(s)=0,\ b_{1,6+p}(s)\neq 0, \tag{63}$$

$$h_{2p,n}(s)=\begin{vmatrix} b_{2n,6+p-n}(s) & b_{2n,6+p+n}(s) \\ b_{2n+1,6+p-n}(s) & b_{2n+1,6+p+n}(s)\end{vmatrix}_{2p,n}=0, \tag{64}$$

где T_{2p} – номер сектора; n – номер серии собственных значений в секторе T_{2p}; p = 1, 2, …, 11; n = 1, 2, …, 5.

Используя формулы (12) и (13), из уравнения (63)–(64) получаем:

$$h_{2p,n}(s)=b_{2n,6+p-n}(s)\cdot b_{2n+1,6+p+n}(s)-b_{2n,6+p+n}(s)\cdot b_{2n+1,6+p-n}(s)=$$

$$=\left[\exp\left(a\left(w_{6+p+n}-w_{6+p-n}\right)\left(x_{2n+1}-x_{2n}\right)s\right)-1\right]-\frac{h_{2p,n,10}(s)}{P_6\cdot s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{20}}\right)=0, \tag{65}$$

$$h_{2p,n,10}(s)=\exp\left(aw_{6+p-n}\left(x_{2n+1}-x_{2n}\right)s\right)\cdot\exp\left(-aw_{6+p+n}x_{2n}s\right)\cdot A_{10,6+p+n}\left(x_{2n+1},s\right)+$$
$$+\exp\left(-aw_{6+p+n}x_{2n+1}s\right)\cdot\exp\left(aw_{6+p+n}\left(x_{2n+1}-x_{2n}\right)s\right)\cdot A_{10,6+p-n}\left(x_{2n},s\right)-$$
$$-\exp\left(-aw_{6+p-n}x_{2n+1}s\right)\cdot A_{10,6+p-n}\left(x_{2n+1},s\right)-\exp\left(-aw_{6+p+n}x_{2n}s\right)\cdot A_{10,6+p+n}\left(x_{2n},s\right). \tag{66}$$

Применяя формулы (6)–(9), аналогично формулам (36)–(42) и (43)–(44) получаем:

$$h_{2p,n,10}(s)=M_{1n}F_1\left(-x_{2n}\right)\cdot G\left(0,x_{2n+1},N_2,N_1\right)+M_{3n}F_1\left(x_{2n+1}-x_{2n}\right)\cdot G\left(0,x_{2n+1},N_2,N_2\right)+$$
$$+M_{1n}F_1\left(x_{2n+1}-x_{2n}\right)\cdot G\left(0,x_{2n},N_1,N_1\right)+M_{3n}F_1\left(x_{2n+1}\right)\cdot G\left(0,x_{2n},N_1,N_2\right)-M_{1n}G\left(0,x_{2n+1},N_1,N_1\right)-$$
$$-M_{3n}F_1\left(x_{2n+1}\right)\cdot G\left(0,x_{2n+1},N_1,N_2\right)-M_{1n}F_1\left(-x_{2n}\right)\cdot G\left(0,x_{2n},N_2,N_1\right)-M_{3n}G\left(0,x_{2n},N_2,N_2\right), \tag{67}$$

$$N_1=6+p-n;\ N_2=6+p+n;\ M_{1n}=w_{6+p-n};\ M_{3n}=w_{6+p+n};$$

$$F_1(x,s)=\exp\left(a\left(M_{3n}-M_{1n}\right)sx\right);\ G(b,c,k,m)=\int_b^c q(t)\exp\left(a\left(w_k-w_m\right)st\right)dt_{akm}. \tag{68}$$

Основное приближение уравнения (65)–(68) имеет вид

$$F_1\left(x_{2n+1}-x_{2n}\right)=0(=)\exp\left(a\left(w_{6+p+n}-w_{6+p-n}\right)\left(x_{2n+1}-x_{2n}\right)s\right)=1=\exp(2\pi ik)(=)$$

$$(=)s_{k,2p,n,\boldsymbol{осн}}=\frac{2\pi ik}{a\left(M_{3n}-M_{1n}\right)\cdot\left(x_{2n+1}-x_{2n}\right)},\ k\in Z, \tag{69}$$

поэтому верно следующее утверждение (см. [3, 22]).

Теорема 8. Асимптотика собственных значений в четных секторах T_{2p} ($p = 1, 2, \ldots, 11$) индикаторной диаграммы имеет следующий вид:

$$s_{k,2p,n} = \frac{2\pi i}{a\left(M_{3n} - M_{1n}\right)\left(x_{2n+1} - x_{2n}\right)} \cdot \left[k + \frac{d_{10,k,2p,n}}{k^{10}} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^{20}}\right)\right], \tag{70}$$

$$d_{10,k,2p,n} = \frac{\left(x_{2n+1} - x_{2n}\right)^{10}}{11} \cdot \frac{1}{\pi^{11}} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi n}{11}\right)\right)^{11} \times$$

$$\times \left[\int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} q(t)\,dt_{a11} + \frac{(-1)^k}{\sin\left(\frac{2\pi n}{11}\right)} \cdot \int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} q(t) \sin\left[\frac{2\pi k}{x_{2n+1} - x_{2n}} t - \frac{2\pi n}{11} - \pi k \frac{x_{2n+1} + x_{2n}}{x_{2n+1} - x_{2n}}\right] dt_{\Phi_{n2}} \right], \tag{71}$$

$$k \in N;\, p = 1, 2, \ldots, 11;\, n = 1, 2, \ldots, 5.$$

Чтобы доказать формулы (70)–(71) теоремы 8, вначале заметим, что из формулы (4) имеем

$$M_{3n} - M_{1n} = w_{6+p+n} - w_{6+p-n} = \exp\left(\frac{2\pi i}{11}(5 + p + n)\right) - \exp\left(\frac{2\pi i}{11}(5 + p - n)\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{2\pi i}{11}(5 + p)\right) \cdot 2i \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{11}\right). \tag{72}$$

Подставляя формулы (69), (70) и (72) в (65)–(68), аналогично выкладкам (33)–(58) получаем доказательство формул (70) и (71) теоремы 8. Из формул (72) и (70) выводим

$$s_{k,2p,n} = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{2\pi i}{11}(5 + p)\right)}{x_{2n+1} - x_{2n}} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi n}{11}\right)} \cdot \left[k + \frac{d_{10,k,2p,n}}{k^{10}} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^{20}}\right)\right]. \tag{73}$$

Из формул (57), (58) и (71), (73) следует, что при условии $x_{2n} \to x_{2n+1}$ (или при условии $x_{2n-1} \to$ $\to x_{2n}$) (при $n \to \infty$) нельзя найти асимптотику собственных значений дифференциального оператора (1)–(3) (в силу (2) краевая задача является недоопределенной).

Дифференциальный оператор четвертого порядка с многоточечными граничными условиями был рассмотрен в работе [23].

Список литературы

1. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. Акад. наук СССР. 1953. Т. 88, № 4. С. 593–596.
2. *Дикий Л.А.* Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля // Успехи матем. наук. 1958. Т. 13, вып. 3(81). С. 111–143.
3. *Лидский В.Б., Садовничий В.А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функциональный анализ и его приложения. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 52–59.
4. *Марченко В.А., Островский И.В.* Характеристика спектра оператора Хилла // Матем. сб. 1975. Т. 97(139), № 4(8). С. 540–606.

5. *Ильин В.А.* О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 5. С. 679–698.

6. *Митрохин С.И.* О формулах следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 6. С. 927–931.

7. *Ильин В.А.* Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2059–2071.

8. *Ломов И.С.* О базисности корневых функций операторов с многоточечными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 6. С. 1053–1056.

9. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Изв. РАН. Сер. математическая. 2000. Т. 64, № 4. С. 47–108.

10. *Ломов И.С.* О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. II // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 5. С. 648–660.

11. *Митрохин С.И.* О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом // Уфим. матем. журн. 2011. Т. 3, № 4. С. 95–115.

12. *Баскаков А.Г., Кацаран Т.К.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 8. С. 1424–1433.

13. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

14. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 1999. Т. 66, вып. 6. С. 897–912.

15. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. Моск. матем. общ-ва. 2003. Т. 64. С. 159–212.

16. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 2001. Т. 69, вып. 3. С. 427–442.

17. *Сафонова Т.А., Рябченко С.В.* О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом // Вестн. Сев. (Арктич.) федер. ун-та. Сер.: Естеств. науки. 2016. № 2. С. 115–125.

18. *Конечная Н.Н., Сафонова Т.А., Тагирова Р.Н.* Асимптотика собственных значений и регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом // Вестн. Сев. (Арктич.) федер. ун-та. Сер.: Естеств. науки. 2016. № 1. С. 104–113.

19. *Юрко В.А.* О восстановлении дифференциальных пучков на графе-кусте // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 51–61.

20. *Митрохин С.И.* Многоточечные дифференциальные операторы: «расщепление» кратных в главном собственных значений // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 5–18.

21. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

22. *Садовничий В.А., Любишкин В.А., Белабасси Ю.* О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса // Докл. Акад. наук СССР. 1980. Т. 254, № 6. С. 1346–1348.

23. *Белабасси Ю.* Регуляризованный след многоточечной задачи // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика, механика. 1981. № 2. С. 35–41.

References

1. Gel’fand I.M., Levitan B.M. Ob odnom prostom tozhdestve dlya sobstvennykh znacheniy differentsial’nogo operatora vtorogo poryadka [On a Simple Identity for Eigenvalues of a Second-Order Differential Operator]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences], 1953, vol. 88, no. 4, pp. 593–596.

2. Dikiy L.A. Formuly sledov dlya differentsial’nykh operatorov Shturma–Liuvillya [Trace Formulas for Sturm–Liouville Differential Operators]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1958, vol. 13, iss. 3(81), pp. 111–143.

3. Lidskii V.B., Sadovnichii V.A. Regulyarizovannye summy korney odnogo klassa tselykh funktsiy [Regularized Sums of Zeros of a Class of Entire Functions]. *Funktsional’nyy analiz i ego prilozheniya* [Functional Analysis and Its Applications], 1967, vol. 1, iss. 2, pp. 133–139.

4. Marchenko V.A., Ostrovskii I.V. Kharakteristika spektra operatora Khilla [A Characterization of the Spectrum of Hill's Operator]. *Matematicheskiy Sbornik* [Mathematics of the USSR-Sbornik], 1975, vol. 26, iss. 4, pp. 493–554.

5. Il'in V.A. O skhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam v tochkakh razryva koeffitsientov differentsial'nogo operatora [Convergence of Eigenfunction Expansions at Points of Discontinuity of the Coefficients of a Differential Operator]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1977, vol. 22, iss. 5, pp. 870–882.

6. Mitrokhin S.I. O formulakh sledov dlya odnoy kraevoy zadachi s funktsional'no-differentsial'nym uravneniem s razryvnym koeffitsientom [On the Trace Formulas for a Boundary Value Problem with a Functional Differential Equation with a Discontinuous Coefficient]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1986, vol. 22, iss. 6, pp. 927–931.

7. Il'in V.A. Neobkhodimye i dostatochnye usloviya bazisnosti Rissa kornevykh vektorov razryvnykh operatorov vtorogo poryadka [Necessary and Sufficient Conditions for the Riesz Basis Property of the Root Vectors of a Second Order Discontinuous Operators]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1986, vol. 22, iss. 12, pp. 2059–2071.

8. Lomov I.S. O bazisnosti kornevykh funktsiy operatorov s mnogotochechnymi kraevymi usloviyami [On the Basis Property of the Root Functions of Operators with Multipoint Boundary Conditions]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1989, vol. 25, iss. 6, pp. 1053–1056.

9. Vinokurov V.A., Sadovnichii V.A. Asimptotika lyubogo poryadka sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy kraevoy zadachi Shturma–Liuvillya na otrezke s summiruemym potentsialom [Asymptotics of Any Order for the Eigenvalues and Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Boundary-Value Problem on a Segment with a Summable Potential]. *Izvestiya RAN. Seriya matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 2000, vol. 64, iss. 4, pp. 695–754.

10. Lomov I.S. O lokal'noy skhodimosti biortogonal'nykh ryadov, svyazannykh s differentsial'nymi operatorami s negladkimi koeffitsientami. II [The Local Convergence of Biorthogonal Series Related to Differential Operators with Nonsmooth Coefficients: II]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 2001, vol. 37, iss. 5, pp. 680–694.

11. Mitrokhin S.I. O spektral'nykh svoystvakh odnogo differentsial'nogo operatora s summiruemymi koeffitsientami s zapazdyvayushchim argumentom [On Spectral Properties of a Differential Operator with Summable Coefficients with a Retarded Argument]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2011, vol. 3, iss. 4, pp. 95–115.

12. Baskakov A.G., Katsaran T.K. Spektral'nyy analiz integro-differentsial'nykh operatorov s nelokal'nymi kraevymi usloviyami [Spectral Analysis of Integro-Differential Operators with Nonlocal Boundary Conditions]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1988, vol. 24, iss. 8, pp. 1424–1433.

13. Naymark M.A. *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 528 p. (In Russ.)

14. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Operatory Shturma–Liuvillya s singulyarnymi potentsialami [Sturm–Liouville Operators with Singular Potentials]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1999, vol. 66, iss. 6, pp. 741–753.

15. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Operatory Shturma–Liuvillya s potentsialami-raspredeleniyami [Sturm–Liouville Operators with Distribution Potentials]. *Trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva* [Transactions of the Moscow Mathematical Society], 2003, vol. 64, pp. 159–212.

16. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Formula sleda dlya operatorov Shturma–Liuvillya s singulyarnymi potentsialami [Trace Formula for Sturm–Liouville Operators with Singular Potentials]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2001, vol. 69, iss. 3, pp. 387–400.

17. Safonova T.A., Ryabchenko S.V. O sobstvennykh znacheniyakh operatora Shturma–Liuvillya s singulyarnym potentsialom [On the Eigenvalues of the Sturm–Liouville Operator with a Singular Potential]. *Vestnik Severnogo (Arkticheskogo) federal'nogo universiteta. Ser.: Estestvennye nauki*, 2016, no. 2, pp. 115–125.

18. Konechnaya N.N., Safonova T.A., Tagirova R.N. Asimptotika sobstvennykh znacheniy i regulyarizovannyy sled pervogo poryadka operatora Shturma–Liuvillya s δ-potentsialom [Asymptotics of the Eigenvalues and Regularized Trace of the First-Order Sturm–Liouville Operator with d-Potential]. *Vestnik Severnogo (Arkticheskogo) federal'nogo universiteta. Ser.: Estestvennye nauki*, 2016, no. 1, pp. 104–113.

19. Yurko V.A. O vosstanovlenii differentsial'nykh puchkov na grafe-kuste [On Recovering Differential Pencils on a Bush-type Graph]. *Izvestiya Saratovskogo Universiteta. Novaya Seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 51–61.

20. Mitrokhin S.I. Mnogotochechnye differentsial'nye operatory: «rasshcheplenie» kratnykh v glavnom sobstvennykh znacheniy [Multipoint Differential Operators: „Splitting" of the Multiple in Main Eigenvalues]. *Izvestiya Saratovskogo Universiteta. Novaya Seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 5–18.

21. Bellman R., Cooke K.L. *Differential-Difference Equations*. New York; London, Academic Press, 1963. 448 p.

22. Sadovnichii V.A., Lyubishkin V.A., Belabassi Yu. O regulyarizovannykh summakh korney tseloy funktsii odnogo klassa [On Regularized Sums of the Roots of the Entire Function of a Class]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences], 1980, vol. 254, iss. 6, pp. 1346–1348.

23. Belabassi Yu. Regulyarizovannyy sled mnogotochechnoy zadachi [A Regularized Trace of the Multipoint Problem]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika*, 1981, iss. 2, pp. 35–41.

DOI: 10.17238/issn2541-8416.2017.17.4.376

Received on June 23, 2017

Sergey I. Mitrokhin*

*Lomonosov Moscow State University
(Moscow, Russian Federation)

ON THE SPECTRAL PROPERTIES OF A MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN ODD-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR WITH SUMMABLE POTENTIAL

The paper studies the boundary value problem for a high odd order differential operator. The potential of an operator is a summable function on the segment of the operator's study. The boundary conditions are given on the boundaries of the segment and at several interior points that divide the segment into incommensurable parts. Thus, the boundary conditions are multipoint. Multipoint boundary conditions arise when studying the vibrations of bridges and beams, the bearings of which are located at internal points. The paper demonstrates the asymptotics of solutions of the corresponding differential equation for large values of the spectral parameter under the condition of potential summability. Previously, the asymptotics of solutions of differential equations was studied in the case of smooth coefficients and piecewise smooth coefficients. Asymptotic estimates in various sectors of the complex plane are obtained similarly to the derivation of estimates by the method of M.A. Naimark. Using the obtained asymptotics of the solutions, boundary conditions are investigated. This study leads to a system of homogeneous equations that has non-trivial solutions only when its determinant is zero. Thus, an equation is obtained which is satisfied by the eigenvalues of the studied operator. We investigate the indicator diagram of this equation. The function that the eigenvalues satisfy is an entire in various sectors of the indicator diagram. Using the indicator diagram, we find the asymptotics of the eigenvalues of the studied differential operator. The spectrum of the operator is discrete. This operator does not exhibit the effect of a "splitting" of multiples in the principal eigenvalues. We can investigate the behavior of eigenfunctions of the studied operator using the obtained spectrum.

Keywords: *multipoint boundary value problem, spectral parameter, multipoint boundary conditions, summable potential, indicator diagram, asymptotics of eigenvalues.*

Corresponding author: Sergey Mitrokhin, *address*: MPO-1, Leninskie gory, 1, stroenie 4, Moscow, 119991, Russian Federation; *e-mail*: mitrokhin-sergey@yandex.ru

For citation: Mitrokhin S.I. On the Spectral Properties of a Multipoint Boundary Value Problem for an Odd-Order Differential Operator with Summable Potential. *Arctic Environmental Research*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 376–392. DOI: 10.17238/issn2541-8416.2017.17.4.376