УДК 512.541

doi: 10.17238/issn2227-6572.2015.3.117

***МУХИН Владимир Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического и программного обеспечения ЭВМ института информационных технологий Череповецкого государственного университета. Автор 150 научных публикаций, в т. ч. двух монографий, 30 учебных пособий*

***СЕРГЕЕВА Дина Владимировна**, преподаватель кафедры информатики и математики Вологодского института права и экономики Федеральной службы исполнения наказаний. Автор 17 научных публикаций, в т. ч. двух учебных пособий*

НЕПРЕРЫВНЫЕ ХАРАКТЕРЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ n-арных ПОЛУГРУПП С СОКРАЩЕНИЯМИ

В работе изучаются гомоморфизмы топологических абелевых *n*-арных полугрупп с сокращениями в группу по умножению всех комплексных чисел по модулю равных 1. Такие отображения называются характерами. Множество всех непрерывных характеров топологической *n*-арной полугруппы *X* обозначаем $\hat{X}$. Относительно поточечного умножения характеров множество $\hat{X}$ является бинарной группой. В качестве предварительного результата показано, что абелеву *n*-арную полугруппу с сокращениями *X* можно рассматривать в качестве *n*-арной подполугруппы *n*-арной группы *G*, которую по аналогии с бинарным случаем можно назвать *n*-арной группой частных абелевой *n*-арной полугруппы с сокращениями. В теореме 1 показано, что каждый характер абелевой *n*-арной полугруппы естественным образом продолжается до характера на *n*-арную группу ее частных. Группа $\hat{X}$ наделяется топологией равномерной сходимости на компактных множествах. В теореме 2 устанавливается, что эта топология согласована с групповой структурой, т. е. $\hat{X}$ становится топологической бинарной группой. В теореме 3 найдены условия, при которых группа $\hat{X}$ алгебраически и топологически изоморфна группе $\hat{G}$. Группу непрерывных характеров бинарной группы $\hat{X}$ обозначаем символом $\hat{\hat{X}}$. По аналогии с бинарным случаем рассматривается естественное отображение π из *X* в $\hat{\hat{X}}$, которое для каждого *x* из *X* соотносит характер $\pi(x)$ группы $\hat{X}$ в соответствии с формулой $\pi(x)(\chi)=\chi(x)$ $\left(\chi \in \hat{X}\right)$. В теореме 4 устанавливается, что если на топологической абелевой *n*-арной полугруппе с сокращениями *X* существует ненулевая инвариантная борелевская мера, то отображение π непрерывно и инъективно, *X* обладает непустым открытым множеством *U* таким, что сужение π на *U* является гомеоморфизмом *U* на открытое подмножество $\pi(U)$ группы $\hat{\hat{X}}$.

***Ключевые слова:** характер, n-арная полугруппа, топология, инвариантная мера.*

Характеры на *n*-арных полугруппах и группах являются естественным распространением этого понятия с бинарного случая. Множество характеров *n*-арной полугруппы относительно обычного умножения функций является бинарной группой. Это, а также то, что топологическая n-арная группа топологически вкладывается в качестве открыто-замкнутого класса смежности в топологическую бинарную группу, дало возможность в [1] распространить теорему двойственности Понтрягина на случай локально-компактных абелевых n-арных групп.

В данной работе изучаются группы характеров топологических абелевых n-арных полугрупп с сокращениями. Основными являются теоремы 3 и 4. В теореме 4 устанавливается связь между топологической абелевой n-арной полугруппой с сокращениями, обладающей ненулевой инвариантной мерой, и второй группой непрерывных характеров этой n-арной полугруппы. Данную теорему можно рассматривать как распространение результатов работы [1] на рассматриваемый случай.

Некоторые определения и предварительные результаты. Упорядоченную пару $\langle X;[\,]\rangle$, где X – непустое множество, $[\,]$ – ассоциативная n-арная операция на X, называют n-арной полугруппой.

Последовательность $a_1,\ldots,a_n$ обозначаем через a_1^n, а результат операции $[\,]$ на этой последовательности – через $[a_1^n]$. Ассоциативность n-арной операции $[\,]$ означает выполнение равенства

$$\left[\left[x_1^n\right]x_{n+1}^{2n-1}\right]=\left[x_1^j\left[x_{j+1}^{j+n}\right]x_{j+n+1}^{2n-1}\right],$$

для любой последовательности $x_1^{2n-1}\in X^{2n-1}$ и для любого $j=1,2,\ldots,n-1$. Стационарную последовательность $a,\ldots,a$ длины k будем обозначать $\overset{k}{a}$. n-арную полугруппу $\langle X;[\,]\rangle$ называют абелевой, если результат $[x_1^n]$ не зависит от перестановки элементов последовательности x_1^n для любой последовательности $x_1^n\in X^n$.

Абелеву n-арную полугруппу $\langle X;[\,]\rangle$ называют n-арной полугруппой с сокращениями, если отображение $x\mapsto\left[a_1^{n-1}x\right]$ $(x\in X)$ инъективно для каждой последовательности $a_1^{n-1}\in X^{n-1}$.

n-арную полугруппу $\langle X;[\,]\rangle$ называют n-арной группой, если каждое из уравнений

$$[xa_1^{n-1}]=a \text{ и } [a_1^{n-1}x]=a \qquad (1)$$

разрешимо для любой последовательности $a_1^{n-1}a\in X^n$.

В n-арной группе $\langle X;[\,]\rangle$ последовательность $a_1^{n-1}\in X^{n-1}$ называют нейтральной последовательностью, если для некоторого $x\in X$ выполняется хотя бы одно из равенств: $[xa_1^{n-1}]=x$, $[a_1^{n-1}x]=x$. Для любой последовательности $a_1^{n-2}\in X^{n-2}$ существует единственный элемент $a\in X$ такой, что последовательность $a_1^{n-2}a$ является нейтральной. Этот элемент a обозначаем $[a_1^{n-2}]^{-1}$. n-арную полугруппу $\langle X;[\,]\rangle$, наделенную топологией τ, называют топологической n-арной полугруппой, если n-арная операция $[\,]$ непрерывна по совокупности переменных. Допуская некоторую вольность, такой объект мы будем обозначать $\langle X;[\,],\tau\rangle$. n-арную группу $\langle X;[\,],\tau\rangle$ называют топологической n-арной группой, если она является топологической n-арной полугруппой и решение x каждого из уравнений в (1) непрерывно зависит от $a_1^{n-1}a\in X^n$. Инвариантной мерой на топологической абелевой n-арной полугруппе $\langle X;[\,],\tau\rangle$ мы называем счетно-аддитивную неотрицательную функцию μ, определенную на σ-кольце, порожденном совокупностью $K(X)$ всех компактных подмножеств $\langle X;[\,],\tau\rangle$ (элементы этого σ-кольца называют борелевскими подмножествами X), конечную на любом компактном подмножестве X, такую, что

$$\mu(B)=\sup\{\mu(C)\mid C\subset B, C\in K(X)\}$$

для любого борелевского множества B и

$$\mu([x_1^{n-1}C])=\mu(C)$$

для любого компактного множества C и любой последовательности $x_1^{n-1}\in X^{n-1}$, где

$$[x_1^{n-1}C]:=\{[x_1^{n-1}x]\mid x\in C\}\cdot$$

Пусть $\langle X;[\,]\rangle$ – абелева n-арная полугруппа с сокращениями. В [2] показано, что существует абелева бинарная группа $\langle G;\cdot\rangle$ и инъективный гомоморфизм $\varphi: X \to G$. Не ограничивая общности, будем отождествлять X с $\phi(X)$, т. е. будем предполагать, что $X \subset G$ и что сужение бинарной операции из G на X совпадает с n-арной операцией на X, т. е. $[x_1^n] = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ для любой последовательности $x_1^n \in X^n$.

Предложение. *Множество* $A = \{x^{-(n-2)} \cdot y^{n-1} \mid x, y \in X\}$ *является n-арной подгруппой группы* $\langle G;\cdot\rangle$, *содержит множество X и является наименьшей n-арной подгруппой группы* $\langle G;\cdot\rangle$, *содержащей множество X, где n-арная операция () на A определяется равенством:* $(x_1^n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ *для любой последовательности* $x_1^n \in A^n$.

Доказательство. Для любого $x \in X$ имеем $x^{-(n-2)} x^{n-1} = x \in A$.

Пусть $x_i, y_i \in X, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Тогда

$$\left(x_1^{-(n-2)} y_1^{\,n-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(x_n^{\,-(n-2)} y_n^{\,n-1}\right) =$$

$$= \left(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n\right)^{-(n-2)} \left(y_1 \cdot \ldots \cdot y_n\right)^{n-1} \in A.$$

Пусть $b_1, b_2, a_i, c_i \in X, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ x = b_1 \cdot a_1^{-1} \times \times \ldots \cdot a_n^{-1}, \ y = b_2 \cdot c_1^{-1} \cdot \ldots \cdot c_n^{-1}$.

Тогда $z = x^{-(n-2)} y^{n-1}$ является решением уравнения

$$a_1^{-(n-2)} \cdot c_1^{\,n-1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\,-(n-2)} \cdot c_1^{\,n-1} \cdot z = b_1^{\,-(n-2)} \cdot b_2^{\,n-1}.$$

Следовательно, A является n-арной подгруппой группы $\langle G;\cdot\rangle$.

Так как каждая n-арная подгруппа группы $\langle G;\cdot\rangle$, содержащая множество X, содержит $x^{-(n-2)} y^{n-1}$ для любых $x, y \in X$, ибо из равенства $x^{-(n-2)} x^{n-1} = x$ следует, что элемент $x^{-(n-2)}$ должен принадлежать n-арной подгруппе группы $\langle G;\cdot\rangle$, содержащей X, то A является наименьшей n-арной подгруппой группы $\langle G;\cdot\rangle$, содержащей множество X.

Предложение 1 доказано.

Далее будем предполагать, что $\langle G;(\ )\rangle$ – абелева n-арная группа, содержащая X, сужение n-арной операции $()$ на X совпадает с $[\,]$ и

$$G = \left\{ \left(\left(\overset{n-2}{x} \right)^{-1} \overset{n-1}{y} \right) \mid x, y \in X \right\}.$$

Основные результаты. Далее $\langle X;[\,],\tau\rangle$ – топологическая абелева n-арная полугруппа с сокращениями, топология которой хаусдорфова. T – группа комплексных чисел по модулю равных единице с операцией обычного умножения чисел, наделенная естественной топологией. Отображение $\chi: X \to T$ назовем характером n-арной полугруппы $\langle X;[\,],\tau\rangle$, если

$$\chi([x_1^n]) = \chi(x_1^n) \cdot \ldots \cdot \chi(x_1^n)$$

для любой последовательности $x_1^n \in X^n$.

Произведение двух характеров (непрерывных характеров) n-арной полугруппы $\langle X;[\,],\tau\rangle$ является характером (непрерывным характером) этой n-арной полугруппы, и множество $\hat{X}$ всех непрерывных характеров n-арной полугруппы $\langle X;[\,],\tau\rangle$ с так определенным умножением является абелевой бинарной группой. Бинарную группу $\hat{X}$ будем называть группой характеров топологической абелевой n-арной полугруппы $\langle X;[\,],\tau\rangle$. Группу характеров группы $\hat{X}$ будем обозначать символом $\hat{\hat{X}}$.

Теорема 1. *Пусть χ – характер абелевой n-арной полугруппы $\langle X;[\,]\rangle$. Тогда формула*

$$f_\chi\left(\left(\overset{n-2}{x} \right)^{-1} \overset{n-1}{y} \right) = \left(\chi(x)\right)^{2-n} \left(\chi(y)\right)^{n-1}, \quad (x, y \in X)$$

определяет характер на $\langle G;(\ )\rangle$, причем его сужение на X совпадает с χ.

Если f – характер $\langle G;(\ )\rangle$, то его сужение χ на X является характером $\langle X;[\,]\rangle$ и f_χ совпадает с f.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2\, y_1, y_2 \in X$ и $\left(\left(\overset{n-2}{x_1}\right)^{-1} \overset{n-1}{x_2}\right) = \left(\left(\overset{n-2}{y_1}\right)^{-1} \overset{n-1}{y_2}\right)$.

Тогда $\left(\overset{n-1}{x_1}\left(\overset{n-2}{x_1}\right)^{-1} \overset{n-1}{x_2}\, \overset{n-1}{y_1}\right) = \left(\overset{n-1}{y_1}\left(\overset{n-2}{y_1}\right)^{-1} \overset{n-1}{x_1}\, \overset{n-1}{y_2}\right)$.

Отсюда имеем $\left(x_1\, \overset{n-1}{x_2}\, \overset{n-1}{y_1}\right) = \left(y_1\, \overset{n-1}{x_1}\, \overset{n-1}{y_2}\right)$.

Следовательно, $\chi(x_1)\ (\chi(x_2))^{n-1}(\chi(y_1))^{n-1} =$
$= \chi(y_1)\ (\chi(x_1))^{n-1}(\chi(y_2))^{n-1}$ и поэтому

$$(\chi(x_1))^{2-n}\ (\chi(x_2))^{n-1} = (\chi(y_1))^{2-n}\ (\chi(y_2))^{n-1}.$$

Тем самым корректность определения f_x установлена. Ясно, что $|f_\chi(x)| = 1$ для любого $x \in G$.

Пусть $g_i = \left(\left(\overset{n-2}{x_1(i)}\right)^{-1} \overset{n-1}{x_2(i)}\right) \in G,$

где $x_1(i), x_2(i) \in X, \quad i = 1, 2, \ldots, n$.
Из доказательства предложения имеем

$$\left(g_1^n\right) = \left(\left(\overbrace{(x_1(1) \ldots x_1(n))}^{n-2}\right)^{-1} \overbrace{(x_2(1) \ldots x_2(n))}^{n-1}\right).$$

Следовательно,

$$f_\chi\left(\left(g_1^n\right)\right) = (\chi((x_1(1) \ldots x_1(n)))^{2-n} (\chi((x_2(1) \ldots x_2(n)))^{n-1} =$$
$$= (\chi(x_1(1)))^{2-n} \cdot \ldots \cdot (\chi(x_1(n)))^{2-n}\ (\chi((x_2(1)))^{n-1} \cdot \ldots \cdot (\chi(x_2(n)))^{n-1} =$$
$$= ((\chi(x_1(1)))^{2-n}\ (\chi(x_2(1)))^{n-1}) \cdot \ldots \cdot ((\chi((x_1(n)))^{2-n} \cdot \ldots \cdot (\chi(x_2(n)))^{n-1}) =$$
$$= f_\chi(g_1) \cdot \ldots \cdot f_\chi(g_n).$$

Так как для любого $x \in X$ имеем $\left(\left(\overset{n-2}{x}\right)^{-1} \overset{n-1}{x}\right) = x,$

то $f_\chi(x) = (\chi(x))^{2-n}\ (\chi(x))^{n-1} = \chi(x).$

Последнее утверждение теоремы очевидно. Теорема доказана.

Теорема 2. *Группа $\hat{X}$, наделенная топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах X, является топологической бинарной группой.*

Доказательство. Семейство отклонений $(f_K)_{K \in K(X)}$ на $\hat{X}$, где $f_K(\chi_1, \chi_2) = \sup\{|\chi_1(x) - \chi_2(x)|:$ $: x \in K\}$, порождает топологию равномерной сходимости на компактных подмножествах X в бинарной группе $\hat{X}$.

Для любых $\chi, \chi_1, \chi_2 \in \hat{X}$, $x \in X$ справедливо равенство $|\chi(x)\,\chi_1(x) - \chi(x)\,\chi_2(x)| = |\chi_1(x) - \chi_2(x)|$. Отсюда следует, что $f_K(\chi\,\chi_1, \chi\,\chi_2) = f_K(\chi_1, \chi_2)$ для любых $\chi, \chi_1, \chi_2 \in \hat{X}$ и любого $K \in K(X)$. Так как $\hat{X}$ является абелевой группой, то, как показано в [3], семейство отклонений $(f_K)_{K \in K(X)}$ порождает топологию, превращающую $\hat{X}$ в топологическую группу.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $\langle X; [\,], \tau\rangle$ – топологическая абелева n-арная полугруппа с сокращениями и на n-арной группе $\langle G; (\ )\rangle$ задана такая локально компактная топология τ_G, превращающая ее в топологическую n-арную группу, что сужение топологии τ_G на X слабее топологии τ и существует непустое множество $U \in \tau_G \cap \tau$ такое, что сужения топологий τ_G и τ на X совпадают.*

Тогда $f_\chi \in \hat{G}$ для всякого $\chi \in \hat{X}$ и отображение $\chi \to f_\chi \quad (\chi \in \hat{X})$ является изоморфизмом локально компактных групп $\hat{X}$ и $\hat{G}$.

Доказательство. Пусть $\chi \in \hat{X}$. Из теоремы 1 следует, что f_χ совпадает с χ на непустом множестве U, открытом в топологии τ и в топологии τ_G. Так как χ непрерывна в каждой точке U, а сужения топологий τ и τ_G на U совпадают, то f_χ непрерывна в каждой точке множества U. Пусть $x_0 \in U$, y_0 – произвольная точка G. Существует последовательность $a_1^{n-1} \in G$ такая, что $\left(a_1^{n-1} x_0\right) = y_0$. Для каждого x из U имеем $f_\chi\left(a_1^{n-1} x\right) = f_\chi\left(a_1\right) \cdot \ldots \cdot f_\chi\left(a_{n-1}\right) \cdot f_\chi(x)$. Так как отображение $x \mapsto \left(a_1^{n-1} x\right)$ является гомеоморфизмом U на открытое подмножество $\left(a_1^{n-1}U\right)$ группы G, то f_χ непрерывна в точке y_0.

Заметим, что если $\psi \in \hat{G}$, то сужение χ характера ψ на X является характером на X, непрерывным характером на X, ибо сужение топологии τ_G на X слабее топологии τ, и $f_\psi = f$.

Отсюда следует, что отображение $\chi \mapsto f_\chi$ $\left(\chi \in \hat{X}\right)$ является биекцией и, очевидно, и гомоморфизмом $\hat{X}$ на $\hat{G}$.

Покажем, что отображение $\chi \mapsto f_\chi$ $\left(\chi \in \hat{X}\right)$ является гомеоморфизмом. Пусть обобщенная последовательность $\left\{\chi(\alpha)\right\}_{\alpha \in A}$ сходится к χ в $\hat{X}$. Пусть K – компактное подмножество G в топологии τ_G, а C – фиксированная компактная окрестность $y_0 \in U$ в топологии τ, целиком лежащая в U. В силу условий теоремы 3 такое множество существует. Так как сдвиги $x \mapsto \left(b_1^{n-1}x\right)$ в G являются гомеоморфизмами, то из компактности K следует существование набора $b_1^{n-1}(i) \in G^{n-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ такого, что $\bigcup\limits_{i=1}^{m}\left(b_1^{n-1}(i)C\right) \supset K.$

Для любого $x \in C$ и любого $i = 1, 2, \ldots, m$ обобщенная последовательность $\left\{h_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$, где

$$h_\alpha(x) = f_{\chi(\alpha)}\left(\left(b_1^{n-1}(i)x\right)\right) =$$
$$= f_{\chi(\alpha)}\left(b_1(i)\right) \cdot \ldots \cdot f_{\chi(\alpha)}\left(b_{n-1}(i)\right) \cdot f_{\chi(\alpha)}(x) =$$
$$= f_{\chi(\alpha)}\left(b_1(i)\right) \cdot \ldots \cdot f_{\chi(\alpha)}\left(b_{n-1}(i)\right) \cdot \chi_\alpha(x),$$

равномерно сходится на множестве C к функции $f_\chi\left(b_1(i)\right) \cdot \ldots \cdot f_\chi\left(b_{n-1}(i)\right) \cdot \chi(x) = f_\chi\left(\left(b_1^{n-1}(i)x\right)\right)$

по направленности A, ибо $\left\{\chi(\alpha)\right\}_{\alpha \in A}$ сходится равномерно на C к χ по этой направленности A. Следовательно, обобщенная последовательность $\{f_{\chi(\alpha)}\}_{\alpha \in A}$ сходится к f_χ по направленности A. Тем самым мы доказали, что отображение $\chi \mapsto f_\chi$ $\left(\chi \in \hat{X}\right)$ непрерывно.

Так как каждое компактное подмножество X является компактным в G и обратное к отображению $\chi \mapsto f_\chi$ есть отображение, которое каждому характеру f из $\hat{G}$ ставит в соответствие характер из $\hat{X}$, равный сужению f на $\hat{X}$, то и отображение обратное к отображению $\chi \mapsto f_\chi$ $\left(\chi \in \hat{X}\right)$ будет непрерывным отображением.

Так как $\hat{G}$ является локально компактным топологическим пространством [1], то и гомеоморфное с ним пространство $\hat{X}$ локально компактно. Тем самым теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Если на топологической абелевой n-арной полугруппе* $\langle X; [\,], \tau\rangle$ *с сокращениями существует ненулевая инвариантная мера* μ, *то топологические группы* $\hat{X}$ *и* $\hat{\hat{X}}$ *являются локально компактными, естественное отображение* π *из* X *в* $\hat{\hat{X}}$, *задаваемое формулой*

$$\pi(x)(\chi) = \chi(x) \ \left(\chi \in \hat{X}\right),$$

непрерывно и инъективно, X *обладает непустым открытым подмножеством U таким, что сужение* π *на U является гомеоморфизмом U на открытое подмножество* $\pi(U)$ *локально компактной группы* $\hat{\hat{X}}$.

Доказательство. Пусть $a_1^{n-2} \in X^{n-2}$, $\langle G; (\ )\rangle$ – наименьшая абелева *n*-арная группа, содержащая $\langle X; [\,]\rangle$ в качестве *n*-арной подполугруппы. Зададим бинарные операции $*$ и $\circ$ на X и G соответственно формулами:

$$x * y = \left(x a_1^{n-2} y\right) \ (x, y \in X);$$

$$x \circ y = \left(x a_1^{n-2} y\right) \ (x, y \in G).$$

Тогда $\langle X, *\rangle$ будет бинарной подполугруппой бинарной абелевой группы $\langle G, \circ\rangle$, а $\langle X, *, \tau\rangle$ – топологической бинарной полугруппой с ненулевой инвариантной мерой μ.

Из теоремы 4.8 работы [4] следует, что на $\langle G; \circ\rangle$ существует такая локально компактная топология τ_G, превращающая G в топологическую группу, что $\langle X, *, \tau\rangle$ имеет открытый идеал U с открытыми сдвигами на элементы X

и для каждого такого идеала U имеем $U \in \tau_G$, сужения топологий τ_G и τ на U совпадают, а сужение топологии τ_G на X слабее топологии τ.

Из равенства $(x_1^n) = x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n \circ \binom{n}{a}$, где $x_1^n \in G^n$, a – элемент из $\langle G;(\ )\rangle$ обратный к последовательности a_1^{n-2}, следует, что n-арная операция $(\ )$ непрерывна по совокупности аргументов в топологическом пространстве (G, τ_G).

Пусть $c_1^{n-1}, c \in G^n$. Так как $(xc_1^{n-1}) = (xa_1^{n-2}ac_1^{n-1}) = x \circ (ac_1^{n-1})$, то решение x уравнения $(xc_1^{n-1}) = c$ в $\langle G;(\ )\rangle$ совпадает с решением уравнения $x \circ (ac_1^{n-1}) = c$ в группе $\langle G;\circ\rangle$. Поэтому такое решение x непрерывно зависит в топологическом пространстве (G, τ_G) от c и от (ac_1^{n-1}). Так как (ac_1^{n-1}) непрерывно зависит в (G, τ_G) от $ac_1^{n-1} \in G^n$ по совокупности аргументов, то решение x непрерывно зависит в топологическом пространстве (G, τ_G) от $c_1^{n-1}c \in G^n$. Таким образом мы показали, что $\langle G;(\ ), \tau_G\rangle$ является топологической n-арной группой.

Из теоремы 3 вытекает, что отображение $\chi \mapsto f_\chi$ из $\hat{X}$ в $\hat{G}$ будет изоморфизмом топологических групп; обозначим его через φ.

Для любого $g \in \hat{\hat{G}}$ композиция $(\varphi \circ g)(\chi) = g(\varphi(\chi))$ $(\chi \in \hat{X})$ является непрерывным характером группы $\hat{X}$, и отображение $\Phi(g) = \varphi \circ g$ $(g \in \hat{\hat{G}})$ будет изоморфизмом топологических групп $\hat{\hat{G}}$ и $\hat{\hat{X}}$.

Пусть H – обертывающая группа для топологической n-арной группы G, т. е. $G \subset H$, H обладает инвариантной подгруппой L такой, что $yL = Ly = G$ для любого $y \in G$, фактор-группа H/L есть циклическая группа порядка $n-1$, порожденная элементом yL, множества $L, yL, \ldots, y^{n-2}L$ попарно не пересекаются и в объединении дают H, совокупность всех подмножеств группы H вида
$\{A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \mid A_i \in \tau_G, i = 1, 2, \ldots, k, k = 1, 2, \ldots, n-1\}$
образует базу локально-компактной топологии группы H, согласованной с групповой структурой H [5].

Заметим, что H – абелева группа, каждое из множеств yG, где $y \in H$, является открыто-замкнутым подмножеством H. Сужение этой топологии на G совпадает с топологией τ_G.

Рассмотрим отображения:

$$\xi : G \to \hat{\hat{G}} \quad (\xi(x)(\chi) = \chi(x), \quad \chi \in \hat{G});$$

$$\xi' : H \to \hat{\hat{H}} \quad (\xi'(x)(\chi) = \chi(x), \quad \chi \in \hat{H});$$

$$i : G \to H \quad (i(x) = x).$$

В теореме 4 из [1] показано, что отображение ξ из G в $\hat{\hat{G}}$ является непрерывным инъективным гомоморфизмом из G в $\hat{\hat{G}}$, при этом $\xi(G)$ является открытой n-арной подгруппой $\hat{\hat{G}}$ и классом смежности по открытой подгруппе $\tilde{L}$ группы $\hat{\hat{G}}$, и порядок $\hat{\hat{G}}/\tilde{L}$ равен $n-1$. В теореме 3 из [1] установлено, что отображение $\pi : \hat{H} \to \hat{G}$, где $\pi(\chi)$ – сужение характера $\chi \in \hat{H}$ на G, является топологическим и алгебраическим изоморфизм $\hat{H}$ на $\hat{G}$. Отображение ξ' – изоморфизмом топологических групп (знаменитая теорема Понтрягина).

Пусть $\pi^*(\psi) = \psi \circ \pi$ $(\psi \in \hat{\hat{G}})$. Тогда π^* является изоморфизмом топологических групп $\hat{\hat{G}}$ и $\hat{\hat{H}}$. В [1] показано, что $\xi(x) = \pi^{*-1}(\xi'(i(x)))$. Отсюда следует, что ξ – открытое отображение.

Пусть p – вложение X в G, т. е. $p(x) = x$. Тогда p является непрерывным отображением, а его сужение на открытое подмножество I – гомеоморфизмом I на $p(I)$. Заметим, что $\pi(x)=\Phi\big(i\big(p(x)\big)\big)$. Отсюда и вытекает справедливость теоремы.

В заключение отметим работу [6], в которой даны необходимые и достаточные условия существования инвариантной меры на топологических абелевых *n*-арных полугруппах с сокращениями.

Список литературы

1. *Мухин В.В., Сергеева Д.В.* Теорема двойственности для локально компактных абелевых *n*-групп // Сибир. математ. журн. 2008. Т. 49, № 6. С. 1361–1368.

2. *Markovski S.* n-Subsemigroups of Cancellative Semigroups // Proc. of the symposium n-ary structures. Skopje, 1982. P. 149–156.

3. *Бужуф Х., Мухин В.В.* О топологиях на полугруппах, определяемых семействами отклонений и полунорм // Изв. вузов. Математика. 1975. № 5. С. 74–77.

4. *Mukhin V.V.* Invariant Measure on Topological Semigroups Which Have an Ideal with Open Translation Mapping // Semigroup Forum. 2001. Vol. 62. P. 159–172.

5. Čupona G. On Topological *n*-group // Bull. Soc. Math. Phys. 1971. № 22. P. 5–10.

6. *Сергеева Д.В.* О существовании инвариантных мер на топологических абелевых *n*-арных полугруппах с сокращениями // Вестн. Ижев. гос. техн. ун-та. Математика. 2013. № 2. С. 140–141.

References

1. Mukhin V.V., Sergeeva D.V. Teorema dvoystvennosti dlya lokal’no kompaktnykh abelevykh n-grupp [Duality Theorem for Locally Compact Abelian n-Groups]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 2008, vol. 49, no. 6, pp. 1361–1368.

2. Markovski S. n-Subsemigroups of Cancellative Semigroups. *Proc. of the symposium n-ary structures*. Skopje, 1982, pp. 149–156.

3. Buzhuf Kh., Mukhin V.V. O topologiyakh na polugruppakh, opredelyaemykh semeystvami otkloneniy i polunorm [On Topologies on Semigroups Defined by Families of Deviations and Seminorms]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 1975, no. 5, pp. 74–77.

4. Mukhin V.V. Invariant Measure on Topological Semigroups Which Have an Ideal with Open Translation Mapping. *Semigroup Forum*, 2001, vol. 62, pp. 159–172.

5. Čupona G. On Topological n-group. *Bull. Soc. Math. Phys. R. S. Macedonia 22, (1971)*, pp. 5–10.

6. Sergeeva D.V. O sushchestvovanii invariantnykh mer na topologicheskikh abele-vykh n-arnykh polugruppakh s sokrashcheniyami [On the Existence of Invariant Measures on Topological Abelian Cancellative n-ary Semigroups]. *Vestn. IzhGTU. Matematika* [Bulletin of Kalashnikov ISTU. Mathematics], 2013, no. 2, pp. 140–141.

Mukhin Vladimir Vasil’evich
Institute of Information Technology,
Cherepovets State University (Cherepovets, Russia)

Sergeeva Dina Vladimirovna
Vologda Institute of Law and Economics
of the Federal Penitentiary Service of Russia (Vologda, Russia)

CONTINUOUS CHARACTERS OF TOPOLOGICAL ABELIAN CANCELLATIVE n-ary SEMIGROUPS

The paper studies the homomorphisms of topological Abelian cancellative n-ary semigroups into the group under multiplication of all complex numbers of modulus 1. These mappings are called characters. The set of all continuous characters of topological n-ary semigroup *X* is denoted $\hat{X}$. The set $\hat{X}$ is a binary group with respect to the pointwise multiplication of characters. A preliminary result shows that the Abelian cancellative n-ary semigroup *X* can be considered as the n-ary subsemigroup of the n-ary group *G*, which as well as in the binary variant can be called the n-ary group of quotients of Abelian cancellative n-ary semigroup. Theorem 1 demonstrates that every character of Abelian n-ary semigroup naturally extends to the character on the n-ary group of its quotients. The group $\hat{X}$ is endowed with the topology of uniform convergence on compact sets. Theorem 2 establishes that this topology is correlated with the group structure; i.e. $\hat{X}$ becomes a topological binary group. Theorem 3 demonstrates the conditions of algebraic and topological isomorphism of the group $\hat{X}$ to the group $\hat{G}$. The group of continuous characters of the binary group $\hat{X}$ is denoted by the symbol $\hat{\hat{X}}$. By analogy with the binary variant we consider a natural mapping π from *X* into $\hat{\hat{X}}$ that the character $\pi(x)$ of the group $\hat{X}$ relates for every *x* of *X* in accordance with the formula $\pi(x)(\chi)=\chi(x)$ $\left(\chi\in\hat{X}\right)$. Theorem 4 establishes that if there is a non-zero invariant Borel measure on a topological Abelian cancellative n-ary semigroup *X*, so the mapping π is continuous and injective, *X* has such nonvacuous open set U that restriction π to *U* is a homeomorphism of *U* onto the open subset $\pi(U)$ of the group $\hat{\hat{X}}$.

Keywords: *character, n-ary semigroup, topology, invariant measure.*

Контактная информация:
Мухин Владимир Васильевич
*адрес:*162600, Вологодская область, г. Череповец, просп. Луначарского, д. 5;
e-mail: mukhinv1945@yandex.ru; mukhin@chsu.ru
Сергеева Дина Владимировна
*адрес:*160002, г. Вологда, ул. Щетинина, д. 2;
e-mail: dina_sergeeva@mail.ru