

*ДОРОГОВ Юрий Иванович, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики филиала Национального исследовательского университета «Московский энергетический институт» (г. Волжский, Волгоградская область)*

### ***ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОСТИ И ПРОЧНОСТИ ОПОРЫ НА ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ***

Рассматривается процесс потери устойчивости упругого стержня, шарнирно опертого по концам и имеющего упругую опору по середине пролета. Исследуется зависимость формы оси стержня в процессе продольного изгиба и критическая сила, при которой происходит потеря устойчивости стержня, от коэффициента жесткости центральной опоры. Получено критическое значение коэффициента жесткости опоры, при котором форма оси стержня в процессе потери устойчивости изменяется с одной полуволны синусоиды на полную волну синусоиды. Предполагается, что ненагруженный стержень имеет начальную погибь. Вначале рассматривается задача о продольно-поперечном изгибе шарнирно опертого по концам упругого стержня. Стержень нагружается продольной сжимающей силой и поперечной силой, приложенной в середине пролета. Исследуется устойчивость равновесия стержня в зависимости от величины продольной сжимающей нагрузки. Рассматриваются различные конфигурации изогнутой оси стержня при различных значениях поперечной нагрузки. В заключение исследуется процесс хрупкого разрушения срединной опоры при продольном изгибе упругого стержня. Материал опоры, неограниченно прочный при сжатии, подвергается разрушениям при растяжении. Причем состояние материала при растяжении определяется полной диаграммой нагружения, описывающей зависимость напряжения  $\sigma$  от деформации  $\epsilon$  от начала нагружения до полного разрушения. Установлено, если опора подвергается частичным разрушениям и вследствие этого является ограниченно прочной при растяжении, то критическая нагрузка, при которой система теряет устойчивое равновесие, в отличие от случая с упругой опорой, определяется как несущая способность системы «стержень–опора». Несущая способность системы меньше, чем критическая нагрузка, определяемая для стержня с упругой опорой.

**Ключевые слова:** *упругий стержень, потеря устойчивости, упругая опора, продольный изгиб, критическая сила, коэффициент жесткости.*

*Продольно-поперечный изгиб стержня.* Задача о продольном изгибе рассмотрена в [1] для стержня с упруго заделанными концами и в [2] для стержня с упругими опорами. В [3–4] исследуются процессы разрушения и потери устойчивости стержней, имеющих неоднород-

ную структуру. Процесс разрушения стержня на упругом основании рассматривается в [5].

В первом разделе рассматривается задача о продольно-поперечном изгибе шарнирно опертого по концам упругого стержня. Стержень нагружается продольной сжимающей силой  $P$  и поперечной силой  $R$ , приложенной в середине пролета. Длина стержня равна  $l$ , момент инерции его поперечного сечения  $J$ . Материал стержня упругий, с модулем упругости  $E$ . Предполагается, что ненагруженный стержень имеет начальную погибь. Сила Эйлера для рассматриваемого стержня обозначена через  $P_e$ .

Декартова система координат связана с опорами. Один конец стержня принят за начало координат, а ось абсцисс направлена так, что она проходит через другой конец стержня. Ось ординат направлена в сторону выпуклости стержня. Линия действия продольной силы совпадает с осью абсцисс, а линия действия поперечной силы проходит через середину стержня и параллельна оси ординат.

Начальный изгиб оси стержня задается в виде полуволны синусоиды:

$$\delta(x) = \delta_0 \sin(\pi x/l).$$

Здесь  $\delta_0$  – начальное отклонение оси стержня в его срединном сечении.

Составляя уравнение равновесия моментов внешних сил, приложенных к стержню, и нормальных напряжений в поперечном сечении, получим дифференциальное уравнение прогибов:

$$y'' + \alpha^2 y = Rx/(2EJ) - (\pi/l)^2 \delta_0 \sin(\pi x/l). \quad (1.1)$$

Здесь  $\alpha = \sqrt{P/EJ}$ .

Из условий закрепления стержня следуют граничные условия:

$$y(0) = 0, y(l) = 0. \quad (1.2)$$

Решая граничную задачу (1.1), (1.2), получим выражение для функции прогибов

$$y(x) = \pi^2 \delta_0 / (\pi^2 - \alpha^2 l^2) \sin(\pi x/l) + Rl/(2P) \left( \frac{x}{l} - \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\alpha l)} \right). \quad (1.3)$$

Прогиб оси стержня в середине пролета  $y_0$  найдем из последнего выражения, подставляя в него  $x = l/2$ , выражение для  $\alpha$  и обозначая  $\rho = P/P_e$ . Получим

$$y_0 = \delta_0 / (1 - \rho) + (Rl / (4P_e \rho)) (1 - \sec(\pi \sqrt{\rho} / 2)). \quad (1.4)$$

При любом значении сжимающей силы  $\rho \neq 1$  зависимость  $y_0(R)$  является линейной. Прогибы центрального сечения при  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$  могут быть найдены как предельные значения выражения (1.4).

При  $\rho \rightarrow 0$  имеем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} y_0 = \delta_0 - \pi^2 Rl / (32P_e) = \delta_0 - Rl^3 / (32EJ).$$

Это же значение прогиба в центральном сечении может быть получено, если рассмотреть изгиб шарнирно опертой по концам балки, нагруженной сосредоточенной силой  $R$  в середине пролета.

Из последнего выражения следует, что при поперечной нагрузке  $R_1 = 32\delta_0 P_e / (\pi^2 l) = 32EJ\delta_0 / l^3$  стержень принимает прямолинейную форму при нулевой сжимающей нагрузке. Назовем это значение *начальной возвращающей силой*.

Найдем значение прогиба при  $P = P_e$  как предел функции (1.4) при  $\rho \rightarrow 1$ . Получим

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} y_0 = (\pi - 3)\delta_0 / 4.$$

То есть прогиб центрального сечения незначителен. Следовательно, потери устойчивости не происходит.

Из условия для  $a$  выразим значение поперечной силы  $R$ , которое при  $a = \pi\delta_0/4$  равно

$$R_* = \pi\delta_0 P_e / l.$$

Назовем это значение *критической возвращающей силой*.

Таким образом, поперечная нагрузка, равная  $R = R_*$ , возвращает стержень в прямолинейное положение независимо от сжимающей нагрузки.

Можно заметить, что  $R_* = \pi^3 R_1 / 32 \approx (31/32)R_1$ . То есть критическая возвращающая сила немного меньше, чем начальная возвращающая сила. В процентном отношении разница составляет 3,125 %.

На основании зависимости  $y_0(R)$  и соответствующих расчетов можно сделать следующие выводы.

Если значение сжимающей силы  $P$  меньше, чем значение эйлеровой силы  $P_e$ , равновесие системы «стержень–опора» устойчивое. Плавное увеличение поперечной нагрузки  $R$  приводит к соответствующему плавному изменению прогибов стержня. Чем ближе значение сжимающей силы  $P$  к эйлеровой силе  $P_e$ , тем сильнее изменение прогиба  $y_0$  при изменении поперечной силы  $R$ .

Если же значение сжимающей силы  $P$  больше, чем значение эйлеровой силы  $P_e$ , равновесие системы «стержень–опора» неустойчивое. Незначительное, случайное изменение поперечной нагрузки  $R$  приводит к резкому увеличению прогибов.

При любом значении прогиба зависимость поперечной силы  $R$ , удерживающей стержень в положении с фиксированным значением прогиба центрального сечения  $P$ , является практически линейной и приблизительно выражается формулой  $R = \pi \delta_0 P / l$ . В частности, для того чтобы удержать стержень в некотором фиксированном положении при значении сжимающей силы, равном значению эйлеровой силы  $P_e$ , требуется прикладывать возвращающую поперечную силу, значение которой равно критической силе  $R_*$ . При этом значение удерживающей силы не зависит от прогиба.

При значении поперечной нагрузки, равном критической силе, потери устойчивости стержня в процессе продольного изгиба не происходит. Максимальный прогиб стержня в центральном сечении составляет 3–4 % от начального отклонения центрального сечения  $\delta_0$ . То есть форма оси стержня представляет собой одну полную волну синусоиды при продольном изгибе, как при значениях сжимающей силы, меньших эйлеровой силы, так и при больших. Однако амплитуда этой волны незначительна. Поэтому можно считать, что стержень сохраняет прямолинейную форму равновесия.

При значении поперечной силы, отличном от критического, по мере приближения сжима-

ющей силы к  $P_e$  начинается асимптотический рост прогибов в срединном сечении. Происходит потеря устойчивости стержня.

Если поперечная нагрузка имеет меньшее значение, чем критическая возвращающая сила, то в процессе увеличения продольной сжимающей силы прогибы растут, всегда оставаясь положительными. Стержень выгибается в сторону начального отклонения. Если поперечная нагрузка имеет большее значение, чем начальная возвращающая сила, то прогибы растут, всегда оставаясь отрицательными. Стержень выгибается в сторону, противоположную начальному отклонению.

Если поперечная нагрузка имеет значение большее, чем критическая возвращающая сила, но меньшее, чем начальная возвращающая сила, то прогиб центрального сечения вначале убывает, пока не станет равным нулю, а затем возрастает в противоположном направлении. Так что при потере устойчивости стержень выгибается в сторону, противоположную начальному отклонению.

Асимптотический рост прогибов наблюдается при всех значениях поперечной возвращающей силы, сколь угодно близких к критическому значению. Чем ближе возвращающая сила к критической, тем дольше стержень сохраняет слабо изогнутую форму и тем резче изгибается при значениях сжимающей силы, близких к эйлеровой. Поэтому практически невозможно создать экспериментальные условия, при которых бы активная поперечная сила удерживала стержень от потери устойчивости при значениях сжимающей силы, равных или превосходящих эйлерову силу. Такая ситуация реализуется при помощи реактивной поперечной силы. Если посередине пролета стержень опирается на шарнирную опору, то он сохраняет прямолинейную форму равновесия при значениях сжимающей силы, превосходящих эйлерову. Известно, что в этом случае потеря устойчивости происходит при значении сжимающей силы, равном  $P = 4P_e$ .

Таким образом, критическая сила  $R_*$  может быть интерпретирована как реакция срединной

опоры при значении сжимающей силы, равном эйлеровой силе. Значения реакций опор на концах будут равны половине реакции средней опоры. Для идеально прямого стержня с сосредоточенной сжимающей силой, приложенной точно вдоль оси стержня, реакции опор отсутствуют.

Если поперечная возвращающая сила меньше критического значения, то она компенсирует действие продольной сжимающей силы при продольно-поперечном изгибе. Компенсация оказывается тем сильнее, чем ближе значение поперечной силы к ее критическому значению.

Если поперечная возвращающая сила больше критического значения, то она усиливает действие продольной сжимающей силы при продольно-поперечном изгибе. Это усиление тем больше, чем больше значение поперечной силы.

При значениях возвращающей силы, близких к критическому, форма оси стержня изменяется с одной полуволны синусоиды на целую волну синусоиды.

При значениях поперечной силы, меньших  $0,9R_*$ , стержень по всей длине выгнут в одну сторону – в ту, которую он был выгнут первоначально, т. е. по всей длине кривизна оси стержня имеет один знак.

При значениях поперечной силы, превышающих  $0,9R_*$ , кривизна оси стержня начинает перераспределяться по знаку. Вблизи одной из опор появляется зона противоположной кривизны. С увеличением поперечной силы эта зона расширяется, трансформируясь в область отрицательных прогибов. Далее эта область растёт и при поперечной силе, равной критическому значению, форма оси стержня представляет собой волну синусоиды. При дальнейшем увеличении поперечной силы область отрицательных прогибов распространяется до тех пор, пока не заполнит всю длину стержня. После чего стержень вновь прогибается в одну сторону, противоположную начальной.

Процесс перегибания оси стержня происходит при критическом значении поперечной нагрузки независимо от величины продольной сжимающей силы.

*Продольный изгиб стержня с упругой опорой посредине.* Рассмотрим стержень с упругой опорой посредине. Жесткость опоры равна  $k$ . Опора не нагружена, если стержень прямолинейный. Со стороны опоры на стержень действует сосредоточенная поперечная сила

$$R = ky(l/2) = ky_0. \quad (2.1)$$

Подставим в выражение (1.4) значение  $R$ , найденное по формуле (2.1). Решим полученное уравнение относительно  $y_0$ . Тогда

$$y_0 = \delta_0 (1 - \rho)^{-1} \left( 1 + \left( \sec(\pi\sqrt{\rho}/2) - 1 \right) kl / (4P_e \rho) \right)^{-1}. \quad (2.2)$$

Прогибы в других сечениях могут быть найдены по формуле (1.3) с учетом того, что  $R = ky_0$ .

Формула (1.3) позволяет рассчитать удлинение упругой опоры  $y_0$  как при значениях нагрузки  $P < P_e$ , так и при значениях нагрузки  $P > P_e$ .

Переходя в последней формуле к пределу при  $\rho \rightarrow 0$ , получим

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} y_0 = \delta_0 \left( 1 + \pi^2 kl / (32P_e) \right)^{-1}.$$

Это же значение прогиба в центральном сечении может быть получено, если в формулу (1.4) подставить  $R = ky_0$  и выразить из полученного выражения  $y_0$ .

Вычислим прогиб центрального сечения стержня при сжимающей силе, равной эйлеровой, переходя в формуле (2.2) к пределу при  $\rho \rightarrow 0$ :

$$y_0 = \pi \delta_0 P_e / (kl).$$

То есть прогибы стержня конечны и обратно пропорциональны жесткости стержня. Следовательно, при  $P \rightarrow P_e$  не происходит потери устойчивости стержня.

Из формулы (2.2) следует, что прогибы срединного сечения будут неограниченно увеличиваться – произойдет потеря устойчивости стержня, если

$$\left( 1 - \sec(\pi\sqrt{\rho}/2) \right) / \rho = 4P_e / (kl). \quad (2.3)$$

Из последнего равенства следует, что критическая сила, при которой происходит потеря устойчивости стержня, не зависит от величины начального отклонения, а зависит от параметра  $l/P_e$  и коэффициента жесткости упругой опоры  $k$ .

В частности, если упругая опора отсутствует, т. е. если  $k = 0$ , то из последнего равенства следует  $\rho = 1$ . Стержень изгибается при продольном изгибе по форме полуволны синусоиды, т. е. знак кривизны по длине стержня не меняется.

Для абсолютно жесткой опоры  $k = \infty$ . Форма оси стержня при продольном изгибе является одной волной синусоиды. Следовательно, прогибы центрального сечения уже не являются максимальными по длине стержня и вполне могут быть конечными и даже стремящимися к нулю при неограниченном росте прогибов в других сечениях. Стержень теряет устойчивость при значении сжимающей силы, равном  $4P_e$ .

Выясним, при каком предельном значении жесткости опоры еще возможен неограниченный рост прогибов центрального сечения при значении сжимающей силы, равном  $4P_e$ . Для этого подставим  $\rho = 4$  в формулу (2.3) и выра-

зим из нее  $k$ . Полученное значение жесткости назовем *критической жесткостью* и обозначим его  $k_*$ . Тогда

$$k_* = 8P_e/l.$$

На *рис. 1* изображены графики прогибов оси стержня при значении коэффициента жесткости центральной опоры  $k = 0,2k_*$  и при различных относительных значениях продольной сжимающей силы  $\rho$ : 1 – 0,6; 2 – 0,8; 3 – 1,0; 4 – 1,2; 5 – 1,4; 6 – 1,45.

На *рис. 2* изображены графики прогибов оси стержня при значении коэффициента жесткости центральной опоры  $k = 1,5k_*$  и при различных относительных значениях продольной сжимающей силы  $\rho$ : 1 – 3,5; 2 – 3,9; 3 – 3,95; 4 – 3,98.

На *рис. 3* изображены графики зависимости относительного значения прогиба в срединном сечении  $\eta$  от продольной сжимающей силы  $\rho$  при различных значениях относительного коэффициента жесткости опоры  $k/k_*$ : 1 – 0; 2 – 0,2; 3 – 0,4; 4 – 0,6; 5 – 0,8; 6 – 1,0. Из анализа этих графиков можно сделать следующие выводы.

Значение силы, при котором происходит потеря устойчивости, является критическим. При значении сжимающей силы, меньшем

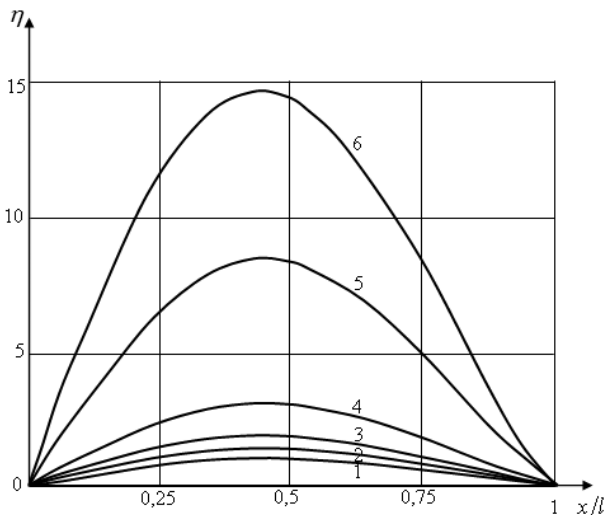


Рис. 1

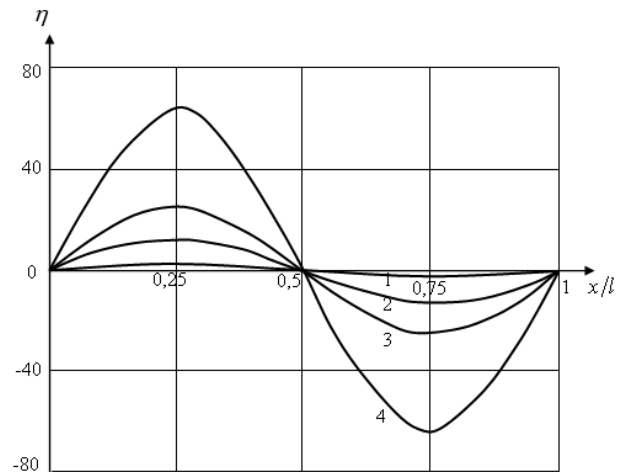


Рис. 2

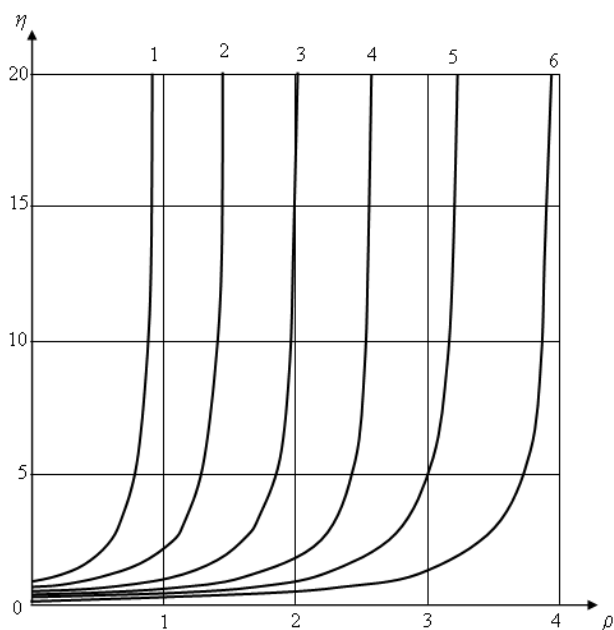


Рис. 3

критического, стержень находится в состоянии устойчивого равновесия. Нагружение стержня с силой, превосходящей критическое значение, приводит к немедленному разрушению, т. е. невозможно.

Форма оси стержня в процессе потери устойчивости при продольном изгибе, как и критическое значение нагрузки, зависит от коэффициента жесткости упругой опоры. Это, в свою очередь, позволяет классифицировать опоры по 2 группам.

К первой группе относятся податливые упругие опоры с коэффициентом жесткости  $k < k_*$ . Стержень теряет устойчивость при нагрузке, лежащей в пределах от одной до четырех эйлеровых сил. При потере устойчивости стержень преимущественно прогибается в одну сторону. Одна полуволна больше другой. Причем, чем меньше коэффициент жесткости опоры, тем ярче выражено отличие полуволн. Вторая полуволна становится заметной в процессе потери устойчивости только при значениях коэффициента жесткости, превышающих

половину критического. Чем ближе коэффициент жесткости к критическому значению, тем выраженнее становится вторая полуволна в процессе потери устойчивости. Однако соотношения длин полуволн практически не изменяются в процессе увеличения продольной сжимающей силы. Прогибы центрального сечения в процессе потери устойчивости неограниченно растут.

При пограничном значении коэффициента жесткости  $k = k_*$  стержень теряет устойчивость при критической нагрузке, равной четырем эйлеровым силам. При значении продольной сжимающей силы, близком к значению  $P_e$ , форма оси стержня представляет собой одну полуволну синусоиды. По мере увеличения сжимающей силы возникает и развивается вторая полуволна с противоположными по знаку значениями прогиба. Соотношение длин полуволн постепенно изменяется в пользу второй полуволны. Однако первая полуволна всегда остается преобладающей, так что в момент потери устойчивости при значении сжимающей силы  $P = 4P_e$  прогибы центрального сечения асимптотически растут в первоначальном направлении.

Ко второй группе относятся жесткие опоры с коэффициентом жесткости  $k > k_*$ . При закреплении такой опорой по центру пролета стержень теряет устойчивость при критической нагрузке, равной  $P = 4P_e$ . Прогибы центрального сечения в процессе потери устойчивости незначительны. Они тем меньше, чем выше коэффициент жесткости опоры. Стержень почти симметрично прогибается в противоположных направлениях с разных сторон от центральной опоры. Обе полуволны практически равны как по длине, так и по амплитуде. При закреплении стержня такой опорой он не только качественно, но и количественно ведет себя так, как будто закреплен при помощи абсолютно жесткой шарнирной опоры в центре пролета.

Критическая нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости стержня, зависит от коэффициента жесткости упругой опоры. Из анализа критических значений  $P_*$  следует, что

зависимость  $P_*(k)$  является почти линейной и может быть приближенно выражена формулой

$$P_*(k) = P_e \left( 1 + 3k/k_* \right).$$

*Продольный изгиб стержня с разрушающейся опорой.* В [6] рассмотрен процесс потери устойчивости равновесия абсолютно жесткого стержня с разрушающейся опорой. В данном разделе исследуется хрупкое разрушение опоры при продольном изгибе упругого стержня. Опора представляет собой стержень длиной  $L$  и площадью поперечного сечения  $S$ . Материал опоры, неограниченно прочный при сжатии, подвергается разрушениям при растяжении. Причем состояние материала при растяжении определяется полной диаграммой нагружения, описывающей зависимость напряжения  $\sigma$  от деформации  $\epsilon$  с момента начала нагружения до полного разрушения. Математическая модель подобного процесса разрушения и ее обоснование рассматривались в работах [7, 8].

В простейшем случае при одноосном нагружении зависимость нормального напряжения  $\sigma$  от деформации  $\epsilon$  в рамках данной модели описывается соотношениями:

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon, & \epsilon \leq \epsilon_0, \\ E\epsilon(\epsilon_n - \epsilon)/(\epsilon_n - \epsilon_0), & \epsilon_0 < \epsilon \leq \epsilon_n. \end{cases}$$

Здесь  $E$  – модуль упругости;  $\epsilon_0$  – предел пропорциональности – деформация, при которой в материале появляются первые признаки разрушения;  $\epsilon_n$  – предел деформируемости – деформация, при которой материал полностью разрушается. Величина  $\beta = \epsilon_n/\epsilon_0$  характеризует неоднородность материала по пределу деформируемости и называется показателем неоднородности.

В [3–5] описанная модель применялась для исследования процесса накопления поврежденных в стержнях при растяжении и изгибе. В [9] исследуются условия, при которых становится возможной реализация нисходящей ветви диаграммы нагружения стержня.

Реакция опоры выражается формулой  $R = \sigma S$ . Применяя выражение относительной де-

формации опоры через ее удлинение  $\epsilon = y_0/L$  и учитывая формулу (2.1), получим зависимость реакции опоры от ее абсолютной деформации:  $R = ky_0$  – на этапе упругого деформирования опоры;  $R = ay_0 - by_0^2$  – на этапе разрушения опоры.

$$\text{Здесь } k = ES/L, a = k\epsilon_n/(\epsilon_n - \epsilon_0),$$

$$b = k/(L(\epsilon_n - \epsilon_0)).$$

На рис. 4 изображен график зависимости  $R(y_0)$ . Как видно из этого рисунка, на участке

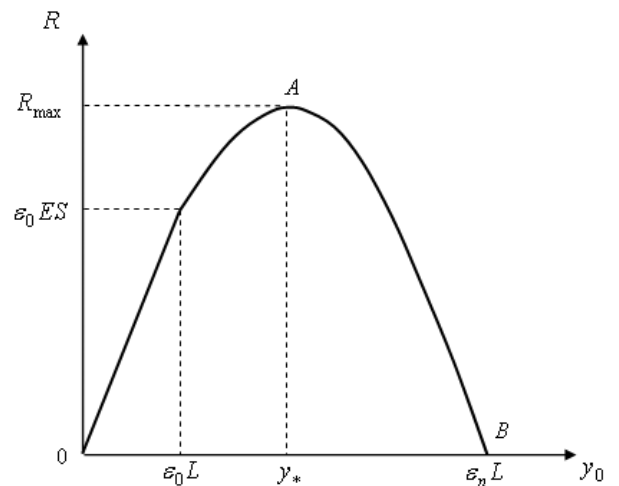


Рис. 4

$AB$  увеличению прогиба  $y_0$  соответствует увеличение реакции  $R$ . В точке  $B$  реакция опоры  $R$  достигает максимального значения  $R_{\max}$ . Прогиб  $y_0$ , при котором это значение достигается, является критическим и может быть найден как корень уравнения  $dR/dy_0 = 0$ . Обозначим критическую деформацию  $y_*$ . Тогда получим

$$y_* = \frac{a}{2b} = \frac{\epsilon_n L}{2}. \quad (3.1)$$

Максимальное значение реакции опоры

$$R_{\max} = \frac{a^2}{4b} = \frac{ES\epsilon_n^2}{4(\epsilon_n - \epsilon_0)}.$$

На участке  $BC$  увеличение прогиба  $y_0$  сопровождается уменьшением реакции опоры  $R$ .

Увеличение внешней нагрузки на опору со стороны стержня приведет к ее немедленному разрушению.

Таким образом, значению реакции  $R < R_{\max}$  соответствуют 2 значения прогиба  $y_0$ , а значения  $R > R_{\max}$  недостижимы.

Подставляя выражение для  $R$  в равенство (1.4), получим уравнение относительно  $y_0$ :

$$y_0 = \frac{ay_0 - by_0^2}{2P_e \rho} \left(1 - \sec\left(\pi\sqrt{\rho}/2\right)\right) + \frac{\delta_0}{1 - P/P_e},$$

которое может быть переписано в виде квадратного уравнения

$$Ay_0^2 + By_0 + C = 0.$$

Здесь

$$A = \frac{b}{4P_e \rho} \left(1 - \sec\left(\pi\sqrt{\rho}/2\right)\right),$$

$$B = 1 + \frac{a}{4P_e \rho} \left(\sec\left(\pi\sqrt{\rho}/2\right) - 1\right), \quad C = \frac{\delta_0}{\rho - 1}.$$

Подставляя вместо  $y_0$  критическое значение деформации по формуле (3.1), получим уравнение для определения критической продольной силы:

$$\frac{a}{2b} = \frac{a^2}{8bP_e \rho} \left(1 - \sec\left(\pi\sqrt{\rho}/2\right)\right) + \frac{\delta_0}{1 - \rho}.$$

Преобразуем последнее уравнение к виду

$$4P_e \rho (a(1 - \rho) - 2b\delta_0) = a^2 \left(1 - \sec\left(\pi\sqrt{\rho}/2\right)\right) (1 - \rho).$$

Таким образом, если опора подвергается частичным разрушениям и вследствие этого является ограниченно прочной при растяжении, то критическая нагрузка, при которой система теряет устойчивое равновесие, в отличие от случая с упругой опорой, определяется как несущая способность системы «стержень–опора».

Несущая способность системы меньше, чем критическая нагрузка, определяемая для стержня с упругой опорой.

## Список литературы

1. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней пластин и оболочек. М., 1971.
2. Лейтес С.Д. Устойчивость сжатых стальных стержней. М., 1954.
3. Дорогов Ю.И. О несущей способности стержня с инородной прослойкой // Изв. вузов. Машиностроение. 2001. № 5. С. 11.
4. Дорогов Ю.И. О развитии трещины в балке при изгибе с полной диаграммой // Изв. вузов. Машиностроение. 2002. № 4. С. 30.
5. Дорогов Ю.И. Разрушение балки на упругом основании // Изв. вузов. Машиностроение. 2005. № 4. С. 31.
6. Дорогов Ю.И. О потере устойчивости абсолютно жесткого стержня с разрушающейся опорой // Механика композиционных материалов и конструкций. 2006. Т. 12, № 3. С. 300.
7. Тарабрин Г.Т. Модель разрушения хрупкоупругой среды // Строительная механика и расчет сооружений. 1990. № 1. С. 25.
8. Тарабрин Г.Т. Редуктивная модель процесса растяжения хрупкого материала и вопросы расчета с полной диаграммой нагружения // Бетон и железобетон. 1994. № 3. С. 22.
9. Дорогов Ю.И. О нисходящей ветви диаграммы деформирования // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. Т. 15, № 2. С. 281–288.

## References

1. Timoshenko S.P. *Ustoychivost' sterzhney plastin i obolochek* [Stability of Rods, Plates and Shells]. Moscow, 1971.
2. Leytes S.D. *Ustoychivost' szhatykh stal'nykh sterzhney* [Stability of Compressed Steel Bars]. Moscow, 1954.
3. Dorogov Yu.I. O nesushchey sposobnosti sterzhnya s inorodnoy prosloykoy [On Load Bearing Capacity of a Rod



with a Foreign Interior Layer]. *Izv. vuzov. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2001, no. 5, p. 11.

4. Dorogov Yu.I. O razvitiit treshchiny v balke pri izgibe s polnoy diagrammoy [On Crack Development in a Beam Under Bending with Complete Diagram]. *Izv. vuzov. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2002, no. 4, p. 30.

5. Dorogov Yu.I. Razrushenie balki na uprugom osnovanii [Destruction of a Beam on Elastic Foundation]. *Izv. vuzov. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2005, no. 4, p. 31.

6. Dorogov Yu.I. O potere ustoychivosti absolyutno zhestkogo sterzhnya s razrushayushcheysya oporoy [Stability Loss of a Rigid Rod with Crumbling Support]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Composite Mechanics and Design], 2006, vol. 12, no. 3, p. 300.

7. Tarabrin G.T. Model' razrusheniya khрупkouprugoy sredy [Destruction Model of a Brittle Elastic Medium]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions], 1990, no. 1, p. 25.

8. Tarabrin G.T. Reduktivnaya model' protsessa rastyazheniya khрупkogo materiala i voprosy rascheta s polnoy diagrammoy nagruzheniya [Reductive Model of Brittle Material Tension and the Problems of Calculating with Complete Loading Diagram]. *Beton i zhelezobeton*, 1994, no. 3, p. 22.

9. Dorogov Yu.I. O niskhodyashchey vetvi diagrammy deformirovaniya [On a Descending Branch of a Stress-Deformation Diagram]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Composite Mechanics and Design], 2009, vol. 15, no. 2, pp. 281–288.

**Dorogov Yuriy Ivanovich**

Branch of Moscow Power Engineering Institute (National Research University)  
(Volzhski, Russia)

### STIFFENING AND STRENGTH EFFECT OF A SUPPORT ON BAR BUCKLING

The process of loss of stability of an elastic rod with hinged ends and elastic support at the midspan is considered in the paper. The dependence of a form of a rod axis in the buckling process and the buckling force, which is the reason of a loss of stability of a rod, on the stiffness factor of the center support, is investigated. The critical value of the support stiffness factor is found. The form of a rod axis in the course of the loss of stability at this value varies from one sine half-wave to full-wave sine wave. It is supposed that an unloaded rod has the initial deflection. The problem of transverse-longitudinal bending of an elastic rod with hinged ends is considered. The rod is loaded by longitudinal compressive force and lateral force applied at midspan. The stable equilibrium for a bar in compression in dependence on the magnitude of the longitudinal compressive stress is investigated. Various configurations of the curved axis of a rod at different values of lateral load are considered. The process of brittle fracture of the center support at the elastic rod buckling is investigated. The material of a support is infinitely strong at compression. Strong under compression bearing material is destroyed under tension. The state of the material under tension is determined by the complete diagram of loading describing the stress dependence on the deformation from the beginning of stress up to final fracture. It is established, if the support is subjected to partial destruction and because of this is limited tensile strong, the critical load, at which the system loses stable equilibrium, in contrast to the elastic support, is defined as the load bearing capacity of the "rod – support" system. The bearing capacity of the system is less than the critical load determined for a rod with the elastic support.

**Keywords:** *elastic rod, loss of stability, elastic support, buckling, buckling force, stiffness factor.*

*Контактная информация:*

*адрес:* 404130, г. Волжский, Волгоградской обл., ул. Ленина, д. 69;  
*e-mail:* ydorogov@yandex.ru