УДК 517.925

ТОМАШЕВСКИЙ Игорь Людвигович*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа алгебры и геометрии института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 27 научных работ, в т. ч. 7 учебно-методических пособий*

О ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ АСИМПТОТИКАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В данной работе рассмотрен некоторый класс систем n линейных дифференциальных уравнений с T-периодическими коэффициентами. Изложен аналитический метод асимптотически точного решения этих систем при $T\to 0$ и получен простой алгоритм вычисления показателей Флоке их фундаментальных решений.

Алгоритм метода сводит поиск фундаментальных решений исходной системы уравнений к задаче на собственные значения и собственные элементы некоторого самосопряженного оператора H, действующего в гильбертовом пространстве специального вида. Методами теории возмущений, использующей T в качестве малого параметра, спектральная задача для оператора H трансформируется в задачу на собственные значения некоторой квадратной матрицы порядка n. Собственные значения этой матрицы представляют собой приближенные значения показателей Флоке фундаментальных решений исходной системы. Проведено сравнение полученных приближенных значений показателей Флоке с результатами «точных» численных расчетов. Найдена оценка сверху для максимальной погрешности приближенных значений. Для случая $n = 2$ для приближенных значений показателей Флоке приведены явные аналитические выражения.

Ключевые слова: *линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами, показатель Флоке, характеристический показатель.*

Введение. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами находят широкое применение для описания различных физико-механических явлений и процессов, которые определяются величинами, периодически изменяющимися в пространстве или во времени. С такими уравнениями приходится встречаться при теоретическом описании твердых тел, динамических расчетах упругих систем и систем автоматического регулирования, а также при решении множества других практически значимых задач.

Теория систем уравнений с периодическими коэффициентами хорошо развита [3] и указывает на существование у них так называемых решений Флоке.

В данной работе решения Флоке исследуются применительно к системам линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, допускающим обобщенную запись в виде операторного уравнения:

$$\left(i\frac{d}{dt} + h + \lambda\, f(wt)V \right) \psi_t = 0, \qquad (1)$$

где λ, w – числовые параметры, h и V – самосопряженные операторы, действующие в n-мерном унитарном пространстве H_n, $\psi_t \in H_n$ – искомая «функция» параметра t, i – мнимая единица, $f(wt)$ – числовая периодическая функция с периодом $T = 2\pi / w$ такая, что

$$\int_0^T f(wt)\,dt = 0 \ \text{ или } \int_0^{2\pi} f(z)\,dz = 0 \qquad (2)$$

(системы уравнений такого рода возникают, в частности, при квантово-механическом описании спектров излучения многозарядных ионов, находящихся в области действия переменных электрических полей [1, 4, 5]). Предлагается алгоритм поиска приближенных решений Флоке этого уравнения и связанных с ними характеристических показателей (показателей Флоке), который в случае достаточно больших частот w сводится к поиску собственных значений и собственных векторов некоторой матрицы порядка n. Основные идеи рассматриваемого метода были использованы ранее в работах [1, 4] при исследовании спектров излучения атомов водорода и водородоподобных ионов, взаимодействующих с гармоническим лазерным полем. В настоящей работе эти идеи систематизированы, обобщены на случай произвольных уравнений вида (1) с произвольными периодическими функциями $f(wt)$ и изложены в терминах спектральной задачи для некоторого самосопряженного оператора, действующего в гильбертовом пространстве специального вида.

Задача на собственные значения для решений Флоке. Согласно теореме Флоке, рассматриваемое уравнение (1) должно иметь хотя бы одно решение Флоке вида

$$\psi_t = \varphi_t\, e^{i\varepsilon t}, \qquad (3)$$

где φ_t – периодическая с периодом T функция, ε – показатель Флоке. Периодическая функция φ_t, согласно (1), удовлетворяет уравнению

$$\left(i\frac{d}{dt} + h + \lambda\, f(wt)V \right) \varphi_t = \varepsilon\varphi_t.$$

В соответствии с этим представляется возможным рассматривать функцию φ_t как собственный элемент оператора

$$Q = i\frac{d}{dt} + h + \lambda\, f(wt)V,$$

действующего в линейном пространстве $H_T = H_n \otimes \tau$, где τ – линейное пространство периодических с периодом T функций. Это пространство превращается в гильбертово, если для его элементов ввести скалярное произведение

$$\left\langle \varphi_t, \phi_t \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T (\varphi_t, \phi_t)\,dt,$$

где (φ_t, ϕ_t) – скалярное произведение в H_n. При этом оператор Q становится самосопряженным. Такая переформулировка задачи позволяет свести поиск решений Флоке ψ_t (3) уравнения (1) к решению спектральной задачи для оператора Q:

$$Q\varphi_t = \varepsilon\varphi_t \cdot \qquad (4)$$

Решение спектральной задачи для оператора Q. Рассмотрим унитарный оператор

$$U = e^{-i\lambda F(t)V},$$

содержащий T – периодическую функцию

$$F(t)=\int_0^t f(wt')\,dt' \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad F(t+T)=F(t),$$

и трансформируем задачу (4) в спектральную задачу для оператора

$$\hat{Q}=UQU^{-1}=i\frac{d}{dt}+e^{-i\lambda F(t)V}he^{i\lambda F(t)V}. \quad (5)$$

В силу унитарной эквивалентности операторов Q и $\hat{Q}$ их собственные значения совпадают, а соответствующие им собственные элементы легко выражаются друг через друга:

$$Q\varphi_t=\varepsilon\varphi_t,\ \hat{Q}\hat{\varphi}_t=\varepsilon\hat{\varphi}_t \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_t=U^{-1}\hat{\varphi}_t. \quad (6)$$

Задачу поиска собственных значений и собственных элементов оператора $\hat{Q}$ можно сформулировать в рамках теории возмущений [2], если рассматривать первое слагаемое в (5) в качестве невозмущенного оператора, второе – в качестве возмущающего оператора

$$\xi g\equiv e^{-i\lambda F(t)V}he^{i\lambda F(t)V}$$

и использовать ξ в качестве формального малого числового параметра. При этом уравнение $\hat{Q}\hat{\varphi}_t=\varepsilon\hat{\varphi}_t$ для собственных элементов и собственных значений оператора $\hat{Q}$ записывается в форме

$$(i\frac{d}{dt}+\xi g)\hat{\varphi}_t=\varepsilon\hat{\varphi}_t, \quad (7)$$

а сами собственные элементы и собственные значения ищутся в виде разложений по малому параметру ξ:

$$\hat{\varphi}_t=\hat{\varphi}_t^{(0)}+\hat{\varphi}_t^{(1)}+\hat{\varphi}_t^{(2)}+\dots\ ,$$

$$\varepsilon=\varepsilon^{(0)}+\varepsilon^{(1)}+\varepsilon^{(2)}+\dots\ , \quad (8)$$

где $\hat{\varphi}_t^{(0)}$ – собственный элемент невозмущенного оператора *id/dt*, $\varepsilon^{(0)}$ – соответствующее ему собственное значение, $\varepsilon^{(k)}$, $\hat{\varphi}^{(k)}$ – поправки порядка ξ^k. Уравнения для этих поправок получаются подстановкой (8) в (7) и приравниванием слагаемых при одинаковых степенях параметра ξ. Для «нулевого приближения» и поправок первого порядка эти уравнения имеют вид:

$$\left(i\frac{d}{dt}-\varepsilon^{(0)}I\right)\hat{\varphi}_t^{(0)}=0,$$

$$\left(i\frac{d}{dt}-\varepsilon^{(0)}I\right)\hat{\varphi}_t^{(1)}=\left(\varepsilon^{(1)}I-\xi g\right)\hat{\varphi}_t^{(0)},$$

где I – единичный оператор в $H_n\otimes\tau$. Из первого уравнения этой системы следует (с учетом того, что $\hat{\varphi}_t^{(0)}\in H_n\otimes\tau$):

$$\varepsilon^{(0)}=mw,\quad \hat{\varphi}_t^{(0)}=\psi e^{-imwt},\ \ \psi\in H_n,\ \ m\in Z.$$

Второе уравнение разрешимо относительно $\hat{\varphi}_t^{(1)}$ только при условии

$$P_m\left(\varepsilon^{(1)}I-\xi g\right)\hat{\varphi}_t^{(0)}=0 \text{ или}$$

$$P_m(\xi g)P_m\,\hat{\varphi}_t^{(0)}=\varepsilon^{(1)}\,\hat{\varphi}_t^{(0)},$$

где P_m – проектор на n-мерное собственное подпространство

$$L_m=\{\psi e^{-imwt}:\ \psi\in H_n\}$$

оператора *id/dt*. Это означает, что поправка $\varepsilon^{(1)}$ является собственным значением, а функция нулевого приближения $\hat{\varphi}_t^{(0)}$ – собственным элементом оператора

$$B=P_m(\xi g)P_m.$$

Матрица $\|B_{lk}\|$ этого оператора в ортонормированном базисе подпространства L_m из элементов $\{\psi_k e^{-imwt}\}$, где $\{\psi_k\}$ – собственные элементы оператора V, соответствующие его собственным значениям $\{V_k\}$, имеет вид

$$B_{lk}=h_{lk}W\left(\alpha_{lk}\right),\ \ l,k=1,..,n, \quad (9)$$

где $h_{lk}=(h\psi_k,\psi_l)$, $\alpha_{lk}=(V_k-V_l)\lambda/w$,

$$W(\alpha)=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\exp(i\alpha\tilde{F}(x))dx,\quad \tilde{F}(x)=\int_0^x f(z)dz.$$

В соответствии с этим поправки $\varepsilon^{(1)}$ к нулевому приближению $\varepsilon^{(0)}=mw$ собственных значений операторов $\hat{Q}$ и Q (см. (8)) являются корнями характеристического уравнения

$$\left|B_{lk}-\varepsilon^{(1)}\delta_{lk}\right|=0 \quad (10)$$

для матрицы (9), а собственные функции нулевого приближения $\hat{\varphi}_t^{(0)}$ оператора $\hat{Q}$ связаны с собственными векторами этой матрицы соотношением

$$\sum_{k=1}^{n} B_{lk} x_k = \varepsilon^{(1)} x_l \Rightarrow \hat{\varphi}_t^{(0)} = e^{-imwt} \sum_{k=1}^{n} x_k \psi_k .$$

В силу (6) для собственных функции нулевого приближения $\varphi_t^{(0)}$ оператора Q получаем

$$\varphi_t^{(0)} = e^{i\lambda F(t)V} \hat{\varphi}_t^{(0)} = e^{-imwt} \sum_{k=1}^{n} x_k e^{i\lambda F(t)V_k} \psi_k .$$

Для входящей в матрицу $\|B_{lk}\|$ функции $W(\alpha)$ в некоторых практически важных случаях можно получить явные выражения. Так, если $f(z) = \cos z$, то $W(\alpha) = J_0(\alpha)$ – функция Бесселя нулевого порядка, если $f(z)$ – удовлетворяющая условию (2) ступенчатая 2π-периодическая функция

$$f(z) = \begin{cases} \gamma^{(+)}, & z \in [0, \delta) \\ \gamma^{(-)}, & z \in [\delta, 2\pi) \end{cases},$$

$$\gamma^{(-)} = -\gamma^{(+)}\delta / (2\pi - \delta),$$

определяемая постоянными $\gamma^{(+)}$ и δ, то

$$W(\alpha) = \frac{\sin(\alpha\eta)}{\alpha\eta} \exp(i\alpha\eta), \quad \eta = \frac{\gamma^{(+)}\delta}{4\pi}. \qquad (11)$$

Изложенный метод позволяет получать явные аналитические выражения для поправок $\varepsilon^{(1)}$ и показателей Флоке $\varepsilon \approx mw + \varepsilon^{(1)}$ в тех случаях, когда корни характеристического уравнения (10) могут быть найдены аналитически. Например, при $n = 2$ уравнение (10) имеет вид

$$\begin{vmatrix} h_{11} - \varepsilon^{(1)} & h_{12}W(\alpha) \\ h_{12}W(-\alpha) & h_{22} - \varepsilon^{(1)} \end{vmatrix} = 0, \quad \alpha = (V_1 - V_2)\lambda / w.$$

И тогда

$$\varepsilon_{1,2}^{(1)} = [h_{11} + h_{22} \pm \sqrt{(h_{11} + h_{22})^2 + 4h_{12}^2 |W(\alpha)|^2}\,] / 2.$$

Аналогичный результат был получен в [4] для случая $f(wt) = \cos(wt)$, когда $W(\alpha) = J_0(\alpha)$.

Комментарии к методу. Относительно точности и вида приближенного решения

$$\varphi_t \approx \varphi_t^{(0)}, \quad \varepsilon \approx mw + \varepsilon^{(1)} \qquad (12)$$

задачи (4) заметим следующее:

1) если входящие в оператор Q операторы h и V являются коммутирующими, т. е. $hV - Vh = 0$, то (12) является точным решением спектральной задачи (4);

2) фактическим малым параметром в разложении (8) является отношение $\max_{i \neq k} |h_{ik}| / w$, поэтому с ростом w точность приближения (12) увеличивается;

3) проведенное сравнение приближенных значений показателей Флоке $\varepsilon \approx mw + \varepsilon^{(1)}$ с точными значениями, найденными путем численных расчетов для операторов Q с различными функциями $f(wt)$ и операторами h и V, показало хорошее совпадение результатов для всех λ (с погрешностью, не превышающей нескольких процентов) в области частот $w \geq 2\Delta$, где Δ – диаметр спектра оператора h, при этом для максимальной погрешности $\Delta\varepsilon_{\max}$ оказывается справедливой следующая приближенная оценка сверху:

$$\Delta\varepsilon_{\max} \leq \Delta \left(\frac{\Delta}{3w}\right)^2;$$

4) в силу (9) поправка $\varepsilon^{(1)}$ зависит только от отношения λ / w;

5) в силу (11) поправка $\varepsilon^{(1)}$ имеет одинаковую величину для любых ступенчатых функций $f(z)$ с одинаковой площадью ступеньки, т. е. для любых функций с $\gamma^{(+)}\delta = \mathrm{const}$.

Список литературы

1. *Алейников В.Н., Климчицкая Г.Л., Томашевский И.Л.* Одноэлектронные многозарядные ионы в переменном поле: трехуровневое приближение // Вестн. ЛГУ. 1985. № 4. С. 32–36.

2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

3. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., 1972.

4. *Helgaker T., Tomashevsky I.* The Hydrogen Atom in Crossed Static Electromagnetic and Non-Resonant Laser Fields // Physica Scripta. 1992. Vol. 46, № 4. P. 354–356.

5. *Manakov N.L., Ovsiannikov V.D., Rapoport L.P.* Atoms in a Laser Field // Physics Reports. 1986. Vol. 141. P. 319–433.

References

1. Aleynikov V.N., Klimchitskaya G.L., Tomashevskiy I.L. Odnoelektronnye mnogozaryadnye iony v peremennom pole: trekhurovnevoe priblizhenie [One-Electron Multiply Charged Ions in an Alternating Field: A Three-Level Approximation]. *Vestnik LGU*, 1985, no. 4, pp. 32–36.

2. Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. 1966. (Russ. ed.: Kato T. *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov*. Moscow, 1972).

3. Yakubovich V.A., Starzhinskiy V.M. *Lineynye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya* [Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications]. Moscow, 1972.

4. Helgaker T., Tomashevsky I. The Hydrogen Atom in Crossed Static Electromagnetic and Non-Resonant Laser Fields. *Physica Scripta*, 1992, vol. 46, no. 4, pp. 354–356.

5. Manakov N.L., Ovsiannikov V.D., Rapoport L.P. Atoms in a Laser Field. *Physics Reports*, 1986, vol. 141, pp. 319–433.

Tomashevsky Igor Ludvigovich

Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

HIGH-FREQUENCY ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF SOME LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

The paper studied some class of systems of *n* linear differential equations with *T*- periodic coefficients. Analytical method of asymptotically exact solution of these systems, when $T \to 0$, was described, and a simple algorithm to calculate Floquet exponents of their fundamental solutions was obtained.

The algorithm reduces the search of fundamental solutions of the original combined equations to a problem on eigenvalues and eigenelements of some self-adjoint H operator acting in a special type of Hilbert space. Perturbation theory, using T as a small parameter, transforms the spectral problem for H operator into a problem on eigenvalues of some square matrix of order *n*. Eigenvalues of this matrix represent approximate values of Floquet exponents of fundamental solutions of the original system. The obtained approximate values of Floquet exponents were compared to the results of "exact" numerical calculations. An upper estimate for the maximum error of approximate values was obtained. Explicit analytical expressions for approximate values of Floquet exponents, when $n = 2$, were given.

Keywords: *linear differential equations with periodic coefficients, Floquet exponent, characteristic exponent.*

Контактная информация:
адрес: 163002, г. Архангельск, Наб. Северной Двины, д. 17;
e-mail: tomashevil@gmail.com

Рецензент – *Андреев П.Д.*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова