УДК 533.72

***ЛУКАШЕВ Вячеслав Валерьевич**, ассистент кафедры математики института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 13 научных публикаций*

***ПОПОВ Василий Николаевич**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 173 научных публикаций, в т. ч. 4 монографий*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В КАНАЛЕ

Построены асимптотические выражения, описывающие потоки массы газа и тепла для различных режимов течения разреженного газа в канале при наличии параллельного стенкам градиента температуры. В качестве исходных соотношений рассматриваются результаты, полученные авторами в рамках кинетического подхода на основе решения линеаризованной БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модели кинетического уравнения Больцмана с использованием зеркально-диффузной модели граничного условия на стенках канала. Для различных значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа при их взаимодействии со стенками канала рассмотрен переход к гидродинамическому режиму и режиму, близкому к свободномолекулярному. Доказано наличие особого режима течения газа в канале, когда, несмотря на исчезающе малые значения числа Кнудсена, режим течения газа существенно отличается от гидродинамического. Найдены условия перехода к данному режиму течения. Установлены границы применимости полученных асимптотических выражений. Проведено сравнение с аналогичными опубликованными результатами.

***Ключевые слова:** кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения, модели граничных условий.*

Введение. Для течений разреженного газа в каналах характерно наличие перекрестных эффектов: перенос тепла в канале может быть обусловлен не только наличием градиента температуры, но и наличием градиента давления, равно как перенос массы газа может быть обусловлен не только наличием градиента давления, но и наличием градиента температуры [4]. Построению математических моделей процессов тепло- и массопереноса в задаче о течении разреженного газа в канале при наличии градиента температуры посвящено значительное число работ, выполненных с использованием численных методов для различных моделей взаимодействия молекул газа со стенками канала, обзор которых можно найти в [4–7]. С использованием аналитических методов данная задача рассматривалась в [2] и [3]. При этом в [3] в качестве граничного условия на стенках канала использовалась модель диффузного отражения, а в [2] – более общая модель зеркально-диффузного отражения. Цель настоящей работы заключается в получении на основе результатов, представленных в [2], асимптотических выражений, описывающих при различных режимах течения газа потоки массы газа и тепла, обусловленные наличием параллельного стенкам канала градиента температуры.

Постановка задачи. Рассмотрим канал толщиной D', стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm d'$ прямоугольной декартовой системы координат ($d' = D'/2$). Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент температуры, параллельный его стенкам. Направим ось Oz' декартовой системы координат вдоль градиента температуры. Будем считать относительный перепад температуры на длине свободного пробега молекул газа малым. Тогда задача допускает линеаризацию, и выражения для потоков массы газа и тепла в канале имеют вид [2].

$$J_M = -\frac{1}{4d^2}\left[-2\left(Q_2 + \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k I_k\right)d + q\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k K_k\right], \quad (1)$$

$$J_Q = -\frac{2}{D^2}\left[\begin{array}{c}-\frac{5}{4}D + \frac{2q}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\tau\exp(-\tau^2)(1-\exp(-D/\tau))d\tau}{1-(1-q)\exp(-D/\tau)} - \\ -\frac{q}{4}\sum_{k=0}^{\infty}K_k\end{array}\right], \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ K_0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\begin{Bmatrix} g(\tau) \\ \zeta(\tau) \end{Bmatrix}[Q_1 - \tau]d\tau, \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} I_k \\ K_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\begin{Bmatrix} g(\tau) \\ \zeta(\tau) \end{Bmatrix}d\tau\int_0^{+\infty}\frac{g(\eta_1)d\eta_1}{\eta_1+\tau}\cdots \quad (4)$$
$$\cdots\int_0^{+\infty}\frac{g(\eta_i)[Q_1-\eta_i]d\eta_i}{\eta_i+\eta_{i-1}},$$

$$g(\tau) = -\frac{\tau X^2(-\tau)\exp(-\tau^2)(\exp(-2d/\tau)-1+q))}{2|\lambda^+(\tau)|^2\,(1-(1-q)\exp(-2d/\tau))}, \quad \tau > 0, \quad (5)$$

$$\zeta(\tau) = -\frac{\tau X(-\tau)\exp(-\tau^2)(1-\exp(-2d/\tau))}{|\lambda^+(\tau)|^2\,(1-(1-q)\exp(-2d/\tau))}. \quad (6)$$

Здесь Q_n – интегралы Лойалки, в частности, $Q_1 = -1{,}01619$, $Q_2 = -1{,}26632$, $X(\tau)$ – факторизующая функция, $\lambda^+(\tau)$ – значение дисперсионной функции Черчиньяни на верхнем берегу разреза [1]. Рассмотрим асимптотику выражений (1) и (2) при различных режимах течения газа в канале.

1. Режим, близкий к гидродинамическому. Рассмотрим вначале случай, когда коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул газа $q = O(1)$, а число Кнудсена $Kn = D^{-1} \ll 1$. Так как в этом случае $D \gg 1$, то в выражениях (5), (6) можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными $\exp(-2d/\tau)$. Поэтому (5) и (6) можно записать в виде:

$$g_{as}(\tau) = (1-q)\gamma(\tau)X^2(-\tau)/2,$$

$$\zeta_{as}(\tau) = -\gamma(\tau)X(-\tau). \quad \gamma(\tau) = \frac{\tau\exp(-\tau^2)}{\left|\lambda^+(\tau)\right|^2}.$$

Тогда выражения для потоков массы газа и тепла (1), (2) примут вид:

$$(J_M)_{as} = \frac{k_0}{D} + \frac{k_1}{D^2}, \qquad (J_Q)_{as} = \frac{t_0}{D} + \frac{t_1}{D^2}, \quad (7)$$

$$k_0 = Q_2 + \frac{1}{2} - \frac{1-q}{2}\alpha_1, \quad k_1 = q\alpha_3,$$

$$t_0 = \frac{5}{2}, \quad t_1 = -\frac{2q}{\sqrt{\pi}} - \frac{\alpha_3}{2},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\gamma(\tau)X^2(-\tau)[Q_1-\tau]d\tau = -0{,}497249,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\gamma(\tau)X(-\tau)[Q_1-\tau]d\tau = 1{,}06771.$$

Как показывают проведенные расчеты, отличие значений потоков массы и тепла, вычисленных по асимптотическим формулам (7), от полученных на основании (1) и (2) составляет не более 1 % для каналов, расстояние между стенками которых $D>7$ и $D>5$ соответственно для потока массы газа и потока тепла. При $D>>1$ выражения (7) переходят в соответствующие формулы, полученные в рамках классической гидродинамики.

Перейдем теперь к рассмотрению случая почти зеркальных граничных условий, когда коэффициент аккомодации $q=O(0)$. Для течений Пуазейля и Куэтта этот случай рассматривался в [1]. При этом были исследованы две качественно различные ситуации: $Kn<<q<<1$ и $q<<Kn<<1$. Проведенный в [1] анализ показал, что переход к гидродинамическому режиму осуществляется только в первом случае, а во втором приводит к так называемому режиму течения со скольжением. В представленной работе обе ситуации проанализированы на основе (1), (2) для задачи о течении газа в канале при наличии параллельного стенкам градиента температуры. При этом показано, что для обеих ситуаций имеют место соотношения:

$$g_{as}(\tau)=\gamma(\tau)X^2(-\tau)/2,\quad \zeta_{as}(\tau)=-\gamma(\tau)X(-\tau), \tag{8}$$

$$(J_M)_{as}=\frac{1}{D}(Q_2+\frac{1}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k(I_k)_{as})=\frac{1}{2D},\ (J_Q)_{as}=\frac{5}{2D}.$$

Здесь $(I_k)_{as}$ получаются из (3), (4) заменой $g(\tau)$ и $\zeta(\tau)$ соответствующими выражениями (8).

2. Переход к свободномолекулярному режиму. Для свободно-молекулярного режима число Кнудсена $Kn>>1$. Исследование поведения газа в свободномолекулярном режиме на основе выражений (1) и (2) является весьма сложной математической задачей. Поэтому имеет смысл вывести приближенные асимптотические формулы для потоков массы газа и тепла, пренебрегая интегралом столкновений в исходном уравнении Больцмана. В этом случае приходим к решению системы уравнений [2]:

$$\mu\frac{\partial Z_1}{\partial x}+\mu^2-\frac{1}{2}=0,\qquad \mu\frac{\partial Z_2}{\partial x}+1=0, \tag{9}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} Z_1(d,\mu)&=(1-q)Z_1(d,-\mu),\\ Z_2(d,\mu)&=(1-q)Z_2(d,-\mu),\quad \mu<0, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} Z_1(-d,\mu)&=(1-q)Z_1(-d,\mu),\\ Z_2(-d,\mu)&=(1-q)Z_2(-d,\mu),\quad \mu>0. \end{aligned} \tag{11}$$

Решение граничных задач (9–11) имеет вид:

$$Z_1(x,\mu)=x(\frac{1}{2\mu}-\mu)+\frac{2-q}{q}d(\frac{1}{2|\mu|}-|\mu|),$$

$$Z_2(x,\mu)=-\frac{x}{\mu}-\frac{d(2-q)}{q|\mu|}.$$

С учетом построенных решений находим профили массовой скорости газа в канале $U_z(x)$ и вектора потока тепла $q_z(x)$:

$$U_z(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{|\mu|>D}\exp(-\mu^2)Z(x,\mu)d\mu\approx-\frac{(2-q)D}{4q\sqrt{\pi}}\ln D.$$

$$q_z(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{|\mu|>D}\exp(-\mu^2)(\mu^2-\frac{1}{2})Z_1(x,\mu)d\mu+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{|\mu|>D}\exp(-\mu^2)Z_2(x,\mu)d\mu\approx\frac{9}{8}\frac{(2-q)D}{q\sqrt{\pi}}\ln D.$$

и соответственно потоки массы газа и тепла, приходящиеся на единицу ширины канала:

$$(J_M)_{as}=\frac{2-q}{2q\sqrt{\pi}}\ln D,\ J_Q\approx\frac{9}{4}\frac{(2-q)}{q\sqrt{\pi}}\ln D. \tag{12}$$

Выражения (12) полностью совпадают с аналогичными выражениями, приведенными в [4]

$$G_T=-\frac{\ln\delta}{2\sqrt{\pi}}\frac{2-q}{q},\quad Q_T=-\frac{9\ln\delta}{4\sqrt{\pi}}\frac{2-q}{q}.$$

Здесь $\delta=Kn^{-1}=D$ – параметр разреженности.

Заключение. Итак, нами получены асимптотические выражения, описывающие потоки массы газа и тепла для близких к гидродинамическому и свободномолекулярному режимам при наличии в канале параллельного стенкам градиента температуры. Показано, что результаты, представленные в [2], содержат в себе как предельные случаи аналогичные результаты, полученные в [3] и [4], а также в рамках классической гидродинамики.

Список литературы

1. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений. М., 2004. 286 с.

2. *Лукашев В.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса в задаче о тепловом крипе // Спектральная теория операторов и ее приложения: материалы всерос. науч. конф. с междунар. участием. Архангельск, САФУ имени М.В. Ломоносова, 25–29 ноября 2012 года Архангельск, 2012. С. 66–70.

3. *Попов В., Тестова И., Юшканов А.* Математическое моделирование течений газа в каналах: моногр. Саарбрюккен, 2012. 116 с.

4. *Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д.* Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург, 2008. 230 с.

5. *Barichello L.B., Camargo M., Rodrigues P., Siewert C.E.* Unified Solutions to Classical Flow Problems Based on the BGK Model // ZAMP. 2001. Vol. 52. P. 517–534.

6. *Siewert C.E.* Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model Linearized Boltzmann Equation // European J. of Mechanics – B/Fluids. 2002. Vol. 21. P. 579–597.

7. *Siewert C.E.* The Linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems // ZAMP. 2003. Vol. 54. P. 273–303.

References

1. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. *Analiticheskie resheniya granichnykh zadach dlya kineticheskikh uravneniy* [Analytical Solutions of Boundary Value Problems for Kinetic Equations]. Moscow, 2004. 286 p.

2. Lukashev V.V., Popov V.N., Yushkanov A.A. Matematicheskoe modelirovanie protsessov teplo- i massoperenosa v zadache o teplovom kripe [Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer in the Thermal Creep Problem]. S*pektral’naya teoriya operatorov i ee prilozheniya: materialy vseros. nauch. konf. s mezhdunar. uchastiem* [Spectral Operator Theory and Its Applications: Proc. All-Russian Sci. Conf. with Int. Participation]. Arkhangelsk, 25–29 November 2012. Arkhangelsk, 2012, pp. 66–70.

3. Popov V., Testova I., Yushkanov A. *Matematicheskoe modelirovanie techeniy gaza v kanalakh* [Mathematical Modelling of Gas Flows in Channels]. Saarbrücken, 2012. 116 p.

4. Sharipov F.M., Seleznev V.D. *Dvizhenie razrezhennykh gazov v kanalakh i mikrokanalakh* [Rarefied Gas Movement in Channels and Microchannels]. Yekaterinburg, 2008. 230 p.

5. Barichello L.B., Camargo M., Rodrigues P., Siewert C.E. Unified Solutions to Classical Flow Problems Based on the BGK Model. *ZAMP*, 2001, vol. 52, pp. 517–534.

6. Siewert C.E. Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model Linearized Boltzmann Equation. *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, 2002, vol. 21, pp. 579–597.

7. Siewert C.E. The Linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems. *ZAMP*, 2003, vol. 54, pp. 273–303.

Lukashev Vyacheslav Valeryevich
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)
Popov Vasily Nikolaevich
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

MATHEMATICAL MODELLING OF TRANSPORT PROCESSES FOR VARIOUS REGIMES OF RAREFIED GAS FLOW IN THE CHANNEL

In this paper we obtained asymptotic expressions describing mass flows of gas and heat for various regimes of rarefied gas flow in the channel with the temperature gradient parallel to the walls. As original relations we use the results obtained by the authors within the framework of the kinetic approach, based on the solution of the linearized BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) model of Boltzmann kinetic equation using diffuse reflection boundary condition on the channel walls. For various tangential momentum accommodation coefficients of gas molecules during their interaction with the channel walls, we studied the transition to the hydrodynamic regime and regime close to the free-molecular one. We proved the existence of a special regime of gas flow in the channel, when, despite the vanishingly small Knudsen number, the gas flow regime differs significantly from the hydrodynamic one. Further, we identified the conditions for transition to this gas flow regime, determined the range of applicability for the obtained asymptotic expressions and compared the obtained results with the similar published ones.

Keywords: *Boltzmann kinetic equation, model kinetic equations, exact analytical solutions, models of boundary conditions.*

Контактная информация:
Лукашев Вячеслав Валерьевич
адрес: 163002, г. Архангельск, Наб. Северной Двины, д. 17;
e-mail: v.lukashev@narfu.ru
Попов Василий Николаевич
адрес: 163002, г. Архангельск, Наб. Северной Двины, д. 17;
e-mail: v.popov@narfu.ru

Рецензент – *Шестаков Л.Н.*, доктор физико-математических наук, профессор, первый проректор Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова