УДК 515.16

***АНДРЕЕВ Павел Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 50 научных публикаций*

***КОЛЧАР Михаил Александрович**, аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 4 научных публикаций*

# *НОРМИРОВАННЫЕ ПЛОСКОСТИ В G-ПРОСТРАНСТВАХ БУЗЕМАНА НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ КОНИЧЕСКОГО ТИПА**

В статье изучается геометрия G-пространства Буземана конического типа, т. е. такого G-пространства X неположительной кривизны, касательный конус $K_pX$ которого изометричен самому пространству. Геодезические пространства этого класса обладают рядом важных геометрических свойств. Наиболее существенно то, что в этом случае на $X$ действует группа $H$ положительных гомотетий $h_k$ с центром $p$. G-пространства конического типа ранее использовались П.Д. Андреевым для доказательства гипотезы Буземана, утверждающей, что всякое G-пространство неположительной кривизны является топологическим многообразием. Основной результат статьи – теорема, утверждающая, что любые два произвольных луча с началом $p$ в пространстве $X$ содержатся в некоторой нормированной плоскости. Здесь под нормированной плоскостью в геодезическом пространстве $X$ понимается выпуклое подмножество, изометричное аффинной плоскости, оснащенной строго выпуклой нормой. Доказательство теоремы опирается на тот факт, что выпуклая оболочка двух не дополнительных друг к другу лучей с общим началом в вершине $p$ есть угол, полученный объединением образов фиксированного отрезка с концами на этих лучах под действием гомотетий вида $h_k$, $k > 0$. Доказанная теорема порождает некоторые дополнительные проблемы. В первую очередь, возникает вопрос, не имеет ли произвольное G-пространство конического типа структуру нормированного пространства в целом? Если ответ на этот вопрос положителен, то появляется новый взгляд на G-пространства неположительной кривизны как на почти финслеровы многообразия. В этом случае единственным отличием G-пространств от финслеровых многообразий будет возможное отсутствие гладкости норм в касательных пространствах.

***Ключевые слова:** G-пространство Буземана, пространство конического типа, луч, отрезок, нормированная плоскость.*

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 14-01-00219 А.

**Введение.** В статье П.Д. Андреева [1] выполнена конструкция касательного конуса в точке $p \in X$ к G-пространству Буземана неположительной кривизны $X$ и дается определение G-пространства конического типа с вершиной $p$ как такого пространства $X$, касательный конус к которому в точке $p$ совпадает с самим пространством. Пространства конического типа обладают рядом важных свойств. Наиболее существенным является наличие действия на таком пространстве группы $H$ положительных гомотетий с центром в $p$. В [1] это свойство используется на одном из этапов доказательства основной теоремы.

В настоящей работе мы получаем значительное усиление указанного свойства. Доказывается следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть $(X, d)$ – G-пространство Буземана конического типа с вершиной $p \in X$, $a, b : [0, +\infty) \to X$ – два не дополнительных друг к другу геодезических луча с началом $p$. Тогда в $X$ существует содержащая эти лучи нормированная плоскость $\alpha$, т. е. выпуклое подмножество $\alpha \subseteq X$, изометричное аффинной плоскости, оснащенной строго выпуклой нормой.

**Основные понятия геометрии G-пространств Буземана и пространств неположительной кривизны по Буземану.** Понятие G-пространства (т. е. пространства с геодезическими) было введено Гербертом Буземаном в середине XX века [2, 3].

**Определение.** Метрическое пространство $(X, d)$ называется G-пространством Буземана, если выполнены следующие свойства (аксиомы G-пространства):

**G1.** $X$ конечно компактно, т. е. любое бесконечное ограниченное множество в $X$ имеет предельную точку.

**G2.** $X$ выпукло по Менгеру, т. е. для любых двух точек $x, y \in X$ найдется точка $z \in X$ отличная от $x$ и $y$ и лежащая между ними:

$$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y). \qquad (1)$$

**G3.** Для каждой точки $x \in X$ существует такое положительное число $r(x)$, что в открытом шаре $U(x, r(x))$ выполняется свойство продолжения отрезков: если $p, q \in U(x, r(x))$, то существует такая точка $z \in U(x, r(x))$, что $q$ лежит между $p$ и $z$.

**G4.** В $X$ выполняется свойство единственности продолжения отрезков. Если $x_1, x_2, y, z \in X$ – такие четыре точки, что $y \neq z$ и $d(x_1, y) + d(y, z) = d(x_2, y) + d(y, z) = d(x_1, z) = d(x_2, z)$, то $x_1 = x_2$.

Отношение точек «лежать между» обозначается $x - z - y$. Это означает выполнение равенства (1) при условии, что точка $z$ отлична от $x$ и $y$.

Из аксиом **G1** и **G2** следует, что пространство $X$ является геодезическим пространством, т. е. любые две точки в $X$ можно соединить отрезком. Под отрезком, соединяющим точки $x, y \in X$, понимается образ в $X$ спрямляемого пути с концами $x$ и $y$, длина которого равна $d(x, y)$. Отрезок с концами $x, y$ обозначается $[xy]$.

**Определение.** Геодезическое пространство $(X, d)$ называется пространством неположительной кривизны в смысле Буземана, если каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью $U(x, r)$, в которой выполнено следующее свойство: для произвольных точек $y, p, q \in U(x, r)$ если $m$ – середина отрезка $[yp]$ и $n$ – середина отрезка $[yq]$, то $d(m, n) \leq 1/2d(p, q)$.

В статье [1] определяется касательный конус к G-пространству неположительной кривизны. Конструкция касательного конуса стандартна. Различные ее модификации применялись ранее в ряде исследований по геометрии метрических пространств с внутренней метрикой [4, 5].

**Определение.** Одно связное G-пространство Буземана неположительной кривизны $(X, d)$ называется пространством конического типа с вершиной $p \in X$, если его касательный конус с вершиной $p$ совпадает с $X$. В этом случае тождественное отображение $Id : X \to K_p X$ является изометрией. Кроме того, в этом случае на пространстве $X$ действует группа $H$ положительных гомотетий с центром $p$.

**Доказательство основной теоремы.** Везде далее метрическое пространство $(X, d)$ является G-пространством Буземана неположительной кривизны конического типа с вершиной $p$.

Первым шагом доказательства теоремы 1 служит следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть $a$, $b : [0, +\infty) \to X$ – два не дополнительных друг к другу луча с началом в $p$. Точки $x, u \in a$, $y, v \in b$ такие, что $p - x - u$ и $p - v - y$. Тогда отрезки $[xy]$ и $[uv]$ пересекаются.

**Доказательство.** Возьмем точки $m \in a$ и $n \in b$ такие, что

$$\frac{d(p,m)}{d(p,u)} = \frac{d(p,y)}{d(p,v)} \text{ и } \frac{d(p,n)}{d(p,v)} = \frac{d(p,x)}{d(p,u)}.$$

Так как на пространстве $X$ действует группа положительных гомотетий, получаем с одной стороны

$$d(u,v) = \frac{d(p,u)}{d(p,x)} \cdot d(x,n),$$

а с другой стороны –

$$d(u,v) = \frac{d(p,u)}{d(p,m)} \cdot d(m,y).$$

Пусть точка $w \in [xy]$ такова, что

$$\frac{d(x,w)}{d(x,y)} = \frac{d(x,u)}{d(x,m)}.$$

Обозначим это отношение $\lambda$. Тогда из неравенства треугольника и свойства неположительности кривизны получаем

$$d(u,v) \le d(u,w) + d(w,v) \le \frac{d(x,u)}{d(x,m)} \cdot d(m,y) + \frac{d(v,y)}{d(n,y)} \times$$

$$\times\, d(x, n) = \lambda d(m, y) + (1 - \lambda) \cdot d(x, n) = d(u, v).$$

Поскольку величины в левой и правой частях равны, знаки неравенства всюду являются знаками равенства. В частности,

$$d(u, v) = d(u, w) + d(w, v),$$

и поэтому $u - w - v$, т. е. $w \in [uv]$. Так как в $X$ любые две точки соединяются единственным отрезком, приходим к заключению, что отрезки $[xy]$ и $[uv]$ пересекаются в точке $w$.

**Следствие.** Пусть $x \in a$ и $y \in b$ – точки на лучах $a$ и $b$, имеющих начало в вершине $p$, точка $w$ – внутренняя точка отрезка $[xy]$, и точки $u \in a$ и $v \in b$ – произвольные. Тогда отрезок $[uv]$ пересекается с лучом $[pw)$.

**Доказательство.** Не уменьшая общности, можно считать, что $d(p, x) = d(p, y) = 1$ и $d(p, u) \ge d(p, v)$. Пусть точка $w$ делит отрезок $[xy]$ в отношении $\lambda$, т. е. $d(x, w)/d(w, y) = \lambda$.

Если $d(p, u) = d(p, v)$, то отрезок $[uv]$ является образом $[xy]$ при гомотетии $h_k$ с центром р и коэффициентом $k = d(p, u)$. Он пересекает луч $[pw)$ в точке $w' = h_k(w)$.

Пусть $d(p, u) > d(p, v)$. Тогда, в силу доказанной леммы 1, при любом $k \in [d(p, v), d(p, u)]$ отрезок $[uv]$ пересекается с отрезком $[x'y']$, где $x' = h_k(x)$ и $y' = h_k(y)$. В частности, несложно убедиться, что при

$$k = \frac{d(p,u)d(p,v)(1+\lambda)}{d(p,u) + \lambda d(p,v)}$$

отрезки $[uv]$ и $[x'y']$ пересекаются в точке $w' = h_k(w)$, принадлежащей лучу $[pw)$. ■

Из доказанных леммы 1 и ее следствия сразу получаем, что выпуклая оболочка лучей $a$ и $b$ представляет собой угол в пространстве $X$, образованный отрезками, соединяющими точки этих лучей.

Теперь мы можем приступить к доказательству основной теоремы.

Пусть $a$, $b : [0, +\infty) \to X$ – данные лучи. Обозначим $a'$, $b' : [0, +\infty) \to X$ – лучи дополнительные, соответственно, к $a$ и $b$. Такие лучи однозначно определены. Зададим отображение $\varphi$ числовой плоскости $R^2$ в $X$. Для пары чисел $(\alpha, \beta) \in R^2$ положим в качестве $\varphi(\alpha, \beta)$ точку пространства $X$, которая однозначно определена следующими условиями: если $\alpha, \beta \ge 0$, то $\varphi(\alpha, \beta)$ лежит на отрезке $[a(\alpha)b(\beta)]$ и делит его в отношении $\alpha/\beta$. В остальных случаях точка $\varphi(\alpha, \beta)$ определяется аналогично по лучам $a$, $b$, $a'$, $b'$ в зависимости от знаков чисел $\alpha$ и $\beta$. В силу леммы 1 образы каждого из четырех числовых квадрантов являются выпуклыми подмножествами в $X$. Покажем, что подмножество $\varphi(R^2)$ является выпуклым в целом. Для этого рассмотрим луч $c = \varphi(M)$, где

$$M = \{(\alpha, a) | \alpha \ge 0\},$$

т. е. образ биссектрисы первого координатного угла в числовой плоскости, и дополнительный к нему луч $c'$. Вновь применяя лемму 1 к углам, образованным лучами $c$ и $b$, а также лучами $c'$ и $b'$, получаем, что и эти углы также являются выпуклыми подмножествами в $X$. Следовательно, весь образ $\varphi(R^2)$ действительно является выпуклым. Более того, из определения отображения $\varphi$ и леммы 1 следует, что отображение $\varphi$ является аффинным, т. е. оно переводит отрезки плоскости $R^2$ в отрезки пространства $X$, сохраняя при этом простое отношение точек.

Теперь определим норму в $R^2$ равенством

$$\|(\alpha, \beta)\| = d(p, \varphi(\alpha, \beta)). \qquad (2)$$

Тот факт, что это равенство действительно определяет норму, следует из условия выпуклости метрики в пространстве неположительной кривизны и аффинности отображения $\varphi$. Действие на $X$ группы $H$ позволяет убедиться, что при задании нормы в плоскости $R^2$ равенством (2) отображение $\varphi$ является изометрией. Это завершает доказательство теоремы.

**Заключение.** Доказанная здесь теорема порождает некоторые вопросы. Первый из них: не является ли G-пространство конического типа нормированным пространством в целом? Если ответ на этот вопрос положителен, то появляется совсем иной взгляд на G-пространства Буземана неположительной кривизны: фактически они становятся почти финслеровыми многообразиями: в каждой точке такого пространства определено касательное линейное пространство, оснащенное нормой. Единственное свойство, отличающее пространства этого класса от финслеровых многообразий, – это возможное нарушение гладкости нормы в касательных пространствах.

Кроме того, существование нормы в G-пространстве конического типа позволило бы значительно сократить доказательство гипотезы Буземана, проведенное П.Д. Андреевым в [1]: в этом случае отпадает необходимость рассматривать второй и третий этапы доказательства, достаточно воспользоваться структурой нормированного пространства в касательном конусе.

### Список литературы

1. *Андреев П.Д.* Доказательство гипотезы Буземана для G-пространств неположительной кривизны // Алгебра и анализ. 2014. № 2. С. 1–20.

2. *Busemann H.* Metric Methods in Finsler Geometry and in the Foundations of Geometry // Ann. Math. Study. Princeton, 1942. Vol. 8.

3. *Busemann H.* On Spaces in Which Two Points Determine a Geodesic // Trans. Amer. Math. Soc. 1943. Vol. 54. P. 171–184.

4. *Сосов Е.Н.* Касательное пространство по Буземану // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 2005. № 6. С. 71–75.

5. *Бураго Ю.Д., Бураго Д.Ю., Иванов С.В.* Курс метрической геометрии. М.; Ижевск, 2004.

### References

1. Andreev P.D. Dokazatel'stvo gipotezy Buzemana dlya G prostranstv nepolozhitel'noy krivizny [Proof of the Busemann Conjecture for G-Spaces of Nonpositive Curvature]. *Saint Petersburg Math. J.*, 2015, vol. 26, no. 2.

2. Busemann H. Metric Methods in Finsler Geometry and in the Foundations of Geometry. *Ann. Math. Study*, 1942, vol. 8.

3. Busemann H. On Spaces in Which Two Points Determine a Geodesic. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1943, vol. 54, pp. 171–184.

4. Sosov E.N. Kasatel'noe prostranstvo po Buzemanu [Busemann Tangent Space]. *Izv. vyssh. ucheb. zavedeniy. Matematika*, 2005, no. 6, pp. 71–75.

5. Burago Yu.D., Burago D.Yu., Ivanov S.V. *Kurs metricheskoy geometrii* [Course of Metric Geometry]. Moscow; Izhevsk, 2004.

***Andreev Pavel Dmitrievich***
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

***Kolchar Mikhail Aleksandrovich***
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

## NORMED PLANES IN THE CONE TYPE BUSEMANN G-SPACES OF NONPOSITIVE CURVATURE

The geometry of the cone type Busemann G-space, that is nonpositively curved G-space X isometric to its space tangent cone KpX, is studied in the paper. Geodesic spaces of this class have a number of significant geometrical properties. The most significant fact is that the group H of positive homotheties hk with the center p acts on X. Andreev P.D. used the cone type G-spaces earlier for proving the Busemann conjecture about the topological manifold of nonpositively curved G-spaces. The basic result of the paper is the theorem stating that any two rays in X beginning at p are contained in some normed plane. In this case the convex subset isometric to the affine plane equipped with strongly convex norm is considered as the normed plane in the geodesic space X. The proof of the theorem is based on the fact that the convex hull of two non-adjugate rays with common beginning in the vertex p is an angle generated by the integration of the fixed segment images with the ends at these rays under the homotheties influence of hk, k > 0. The proven theorem leads to some new problems. First of all, there is a question whether an arbitrary cone type G-space has a global structure of the normed space? The positive answer to this question allows considering G-spaces of non-positive curvature as almost Finsler manifolds. In this case, the only difference between G-spaces of non-positive curvature and Finsler manifolds is the possible lack of smoothness of norms in the tangent spaces.

***Keywords:*** *Busemann G-space, cone type space, ray, segment, normed plane.*

*Контактная информация:*
Андреев Павел Дмитриевич
*адрес:* 163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68, корп. 3;
*e-mail:* pdandreev@mail.ru

Колчар Михаил Александрович
*адрес:* 163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68, корп. 3;
*e-mail:* mishandri@gmail.com

Рецензент – *Сосов Е.Н.,* доктор физико-математических наук, доцент кафедры геометрии института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета